

DM 15

Exercice 1. Soient $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + t - z = 0\}$,

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y + z, t = x + y\}.$$

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels, et déterminer une base de chacun d'eux.
2. Justifier que $F \cap G$ est un espace vectoriel réel et en déterminer une base.

1. Explicitons F : si $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si $t = -x - y + z$. Donc

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z, -x - y + z), x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 1), x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)). \end{aligned}$$

Ainsi, F est un sev de $\mathbb{R}^4$, et la famille $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1))$ est une famille génératrice de F .

Par ailleurs, comme la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ non nuls $((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1))$ est échelonnée, on en déduit qu'elle est libre. Cette famille est donc une base de F .

Par ailleurs, $(x, y, z, t) \in G$ ssi $\begin{cases} x = y + z, \\ t = x + y, \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x = y + z, \\ t = 2y + z. \end{cases}$ Ainsi,

$$\begin{aligned} G &= \{(y + z, y, z, 2y + z) \in \mathbb{R}^4, y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, 0, 2) + z(1, 0, 1, 1), x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}((1, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 1)). \end{aligned}$$

Ainsi, G est un sev de $\mathbb{R}^4$, et la famille $((1, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 1))$ est une famille génératrice de G . Comme $(1, 1, 0, 2)$ et $(1, 0, 1, 1)$ ne sont pas colinéaires, c'est aussi une famille libre, donc $((1, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 1))$ est une base de G .

2. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on sait par le cours que $F \cap G$ est aussi un sev de $\mathbb{R}^4$. On a par ailleurs

$$F \cap G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - z + t = 0, x - y - z = 0, x + y - t = 0\}.$$

Par conséquent, si $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - z + t = 0 \\ -2\boxed{y} - t = 0 \\ \boxed{z} - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{t}{2} \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } F \cap G = \left\{ \left(\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, 2t, t \right), y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 1 \right) = \text{Vect}(3, -1, 4, 2).$$

Comme le vecteur $(3, -1, 4, 2)$ est non nul, il forme une base de $F \cap G$.

Exercice 2. On note u, v et w les suites réelles définies par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels $au + bv + cw = 0$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a2^n + b3^n + c4^n = 0.$$

En écrivant cette relation pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + 4c = 0 \\ 4a + 9b + 16c = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 5b + 12c = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$$

On trouve alors que $a = b = c = 0$, donc (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.