

DM 17

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent de la suite (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \geq 2$.
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{2n^2 - \ln(n)}{n^3 - \sqrt{1+n^2}}$, pour $n \geq 2$.
4. $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n-1)}{(n-1)(n+1)} = \frac{2}{n^2-1}$ donc $u_n \sim \frac{2}{n^2}$.

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.

2. Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1 \right) = \sqrt{n-1} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n-1}} - 1 \right).$$

Par conséquent, comme $\frac{2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $u_n \sim \sqrt{n} \frac{1}{2} \frac{2}{n-1} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série à termes positifs $\sum u_n$ est divergente.

3. Comme $\ln n = o(n^2)$, on a $\ln n - 2n^2 \sim -2n^2$. Par ailleurs, on a $\sqrt{1+n^2} \sim n$, donc $\sqrt{1+n^2} = o(n^3)$, ce qui donne que $n^3 - \sqrt{1+n^2} \sim n^3$.

Finalement, $u_n \sim \frac{-2n^2}{n^3} = -\frac{2}{n}$. Comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série à termes positifs $\sum u_n$ également.

4. Comme $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

La comparaison avec la série à termes positifs divergente $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ assure alors que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{(n+1)^2}.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n .
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

1. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par comparaison.

Ceci entraîne que $e^{-u_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $e^{u_{n-1}} \sim 1$. Ainsi,

$$\text{comme pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{e^{u_{n-1}}}{n^2}, \text{ on a } u_n \sim \frac{1}{n^2}.$$

2. Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, on en déduit que la série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente également.

Exercice 3. Le but de l'exercice est l'étude du comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. *Limite.*

- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq \sqrt{n}$.
- En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. *Recherche d'un équivalent.*

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.
- Montrer que $\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et en déduire que $u_n = o(n)$.
- Montrer enfin que $u_n \sim \sqrt{n}$.

- Montrons par récurrence que pour tout n , u_n est bien défini, et $u_n \geq \sqrt{n}$.
 - On a $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que u_n est bien défini, et $u_n \geq \sqrt{n}$. Comme $u_n \geq 0$, $n+1+u_n \geq 0$, donc u_{n+1} est bien défini. Comme $n+1+u_n \geq n+1$, on a $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \geq \sqrt{n+1}$ par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$, ce qui clôt la récurrence.

b. On a $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, par comparaison, l'inégalité de 1.a. donne $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)$, c'est-à-dire que $2\sqrt{x} \leq 1+x$. On a

$$1+x-2\sqrt{x} = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0,$$

D'où l'inégalité.

- Montrons le résultat par récurrence sur n .

- On a $0 + \frac{u_0}{2^0} = u_0 \geq u_0$, donc le résultat est vrai au rang 0.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$. Comme $n+1+u_n \in \mathbb{R}_+$, la question précédente donne $u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n} \leq \frac{1}{2}(n+2+u_n)$. Ainsi, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2n+2+\frac{u_0}{2^n})$ par hypothèse de récurrence. On a donc bien $u_{n+1} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}$.

On a donc montré par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n-1} \leq n-1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}$, donc

$$\frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{2^{n-1}n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, on a bien $u_{n-1} = o(n^2)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car $\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $u_n = o(n)$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}.$$

On a $\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\frac{u_{n-1}}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $u_n \sim \sqrt{n}$.