

DM 17

à rendre pour le 26.03.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent de la suite (u_n) et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \geq 2$.
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.
3. $u_n = \frac{2n^2 - \ln(n)}{n^3 - \sqrt{1+n^2}}$, pour $n \geq 2$.
4. $u_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{(n+1)^2}.$$

1. Déterminer un équivalent de u_n .
2. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 3. Le but de l'exercice est l'étude du comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. *Limite.*
 - a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq \sqrt{n}$.
 - b. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. *Recherche d'un équivalent.*
 - a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.
 - c. Montrer que $\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et en déduire que $u_n = o(n)$.
 - d. Montrer enfin que $u_n \sim \sqrt{n}$.