

DM 18

à rendre pour le 02.04.

Exercice 1.

1. Déterminer $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ et $u_4 = (1, -1, 0)$.
2. Déterminer $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4)$, où $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 3, 4, 1)$, $u_3 = (3, 4, 1, 2)$ et $u_4 = (4, 1, 2, 3)$.
Que dire de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) ?

Exercice 2. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{(2a, -a, 0, a), a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels F et G , et préciser leur dimension.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}_3[x]$. On définit les sous-espaces vectoriels de E :

$$\begin{aligned} F &= \{P \in E, P(0) = P(1) = P(2) = 0\}, \\ G &= \{P \in E, P(1) = P(2) = P(3) = 0\}, \\ H &= \{P \in E, P(-x) = P(x)\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de F , G et H .
2. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E, P(1) = P(2) = 0\}$.
3. Montrer que $E = (F \oplus G) \oplus H$.