DM 19

Exercice 1. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, trouver un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieure à 5.10^{-6}.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[100, 101]$, on peut donc lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 au point 100. Ceci donne :

$$\left|f(101) - \big(f(100) + f'(100)(101-100)\big)\right| \leqslant M\,\frac{(101-100)^2}{2!},$$

où M est tel que $|f^{(2)}(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [100, 101]$.
Pour $t \in [100, 101]$, on a $f'(t) = -\frac{1}{2t^{3/2}}$, et $f''(t) = \frac{3}{4t^{5/2}}$. Ainsi, $|f''(t)| \leqslant \frac{3}{4.10^5}$ pour tout $t \in [100, 101]$ par décroissance de f'', et on peut choisir $M = \frac{3}{4}10^{-5}$. On obtient alors

$$\left|\frac{1}{\sqrt{101}} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2.10^3}\right)\right| \leqslant \frac{3}{4}10^{-5}\,\frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad \left|\frac{1}{\sqrt{101}} - 0{,}0995\right| \leqslant \frac{3}{8}.10^{-5} < 5.10^{-6}.$$

L'approximation de $\frac{1}{\sqrt{101}}$ par le nombre décimal 0,0995 est donc suffisante.

Exercice 2. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a
$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

2. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\sum\limits_{k=1}^n a_k^p \neq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^n b_k^q \neq 0$.
En posant $u_i = \frac{a_i^p}{\sum\limits_{k=1}^n a_k^p}$ et $v_i = \frac{b_i^q}{\sum\limits_{k=1}^n b_k^q}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que
$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
Cette inégalité porte le nom d'*inégalité de Hölder*.

1. On suppose d'abord que $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, alors comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la concavité de la fonction ln donne que
$$\ln\left(\frac{1}{p}\,u + \frac{1}{q}\,v\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln u + \frac{1}{q}\ln v.$$
En composant par exp qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient
$$\frac{1}{p}\,u + \frac{1}{q}\,v \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln u + \frac{1}{q}\ln v} = \mathrm{e}^{\ln\left(u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}}\right)} = u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}}.$$
Par ailleurs, si $u = 0$ ou $v = 0$, alors $u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} = 0$, et l'inégalité à démontrer est triviale.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient $u_i^{\frac{1}{p}} v_i^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u_i}{p} + \frac{v_i}{q}$ en appliquant l'inégalité précédente à u_i, v_i. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{\frac{1}{p}} v_i^{\frac{1}{q}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{p} + \frac{v_i}{q}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{b_i^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité de Hölder en multipliant l'inégalité ci-dessus par $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Exercice 3. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle, en commençant par A, une pièce non équilibrée telle que la probabilité d'obtenir Face vaut $p \in]0, 1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors. On suppose l'expérience modélise par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. On note G_n l'événement "le joueur A gagne à son n-ème lancer", et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit les événements

$$A_k : \text{“}A \text{ obtient Face au } k\text{-ème lancer”}, \qquad B_k : \text{“}B \text{ obtient Face au } k\text{-ème lancer”}.$$

Ecrire G_n en fonction de certains événements A_k, B_k, et déterminer $\mathbb{P}(G_n)$.

2. On note G l'événement "A gagne". Écrire G en fonction des événements G_n, et déterminer $\mathbb{P}(G)$.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

1. On note F_n^A (resp. F_n^B) l'événement "le joueur A (resp. B) obtient face au n-ième lancer", et on note A_n l'événement "le joueur A gagne au n-ième lancer". On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}\left(\overline{F_1^A} \cap \overline{F_1^B} \cap \dots \overline{F_{n-1}^A} \cap \overline{F_{n-1}^B} \cap F_n^A\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\overline{F_1^A}\right) \mathbb{P}\left(\overline{F_1^B}\right) \dots \mathbb{P}\left(\overline{F_{n-1}^A}\right) \mathbb{P}\left(\overline{F_{n-1}^B}\right) \mathbb{P}\left(F_n^A\right) \\ &= (1-p)^{2(n-1)} p, \end{aligned}$$

par indépendance des lancers.

2. On note A : "le joueur A gagne". On a $A = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}^\star} A_n$, donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{2(n-1)} p = p \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^n.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A) = p \dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2p-p^2} = \dfrac{1}{2-p}$.

3. Soit C : "le jeu ne s'arrête pas". L'événement C est réalisé si et seulement si les deux joueurs obtiennent

Pile indéfiniment : $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \overline{F_n^A} \cap \overline{F_n^B}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{F_k^A} \cap \overline{F_k^B}\right) \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{F_k^A} \cap \overline{F_k^B}\right).$$

Par conséquent, $\mathbb{P}(C) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left((1-p)^2\right)^n = 0$.

4. Pour que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner, il faudrait avoir $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A})$, or

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{A}) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2-p} = 1 - \frac{1}{2-p} \;\Leftrightarrow\; 1 = 2 - p - 1 \;\Leftrightarrow\; p = 0.$$

Comme $p \in]0,1[$, on en déduit qu'il n'existe pas de telle valeur de p.