

DM 19

à rendre pour le 22.04.

Exercice 1. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, trouver un nombre décimal qui approche $\frac{1}{\sqrt{101}}$ avec une précision inférieure à $5 \cdot 10^{-6}$.

Exercice 2. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En exploitant la concavité de $x \mapsto \ln x$, établir que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

2. Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\sum_{k=1}^n a_k^p \neq 0$ et $\sum_{k=1}^n b_k^q \neq 0$.

En posant $u_i = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^n a_k^p}$ et $v_i = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^n b_k^q}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Cette inégalité porte le nom d'*inégalité de Hölder*.

Exercice 3. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle, en commençant par A , une pièce non équilibrée telle que la probabilité d'obtenir Face vaut $p \in]0, 1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors. On suppose l'expérience modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On note G_n l'événement "le joueur A gagne à son n -ème lancer", et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit les événements

$$A_k : \text{"A obtient Face au } k\text{-ème lancer"}, \quad B_k : \text{"B obtient Face au } k\text{-ème lancer"}.$$

Ecrire G_n en fonction de certains événements A_k, B_k , et déterminer $\mathbb{P}(G_n)$.

2. On note G l'événement " A gagne". Écrire G en fonction des événements G_n , et déterminer $\mathbb{P}(G)$.
3. Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?
4. Y a-t-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?