DM 20

Exercice 1. On estime que la demande d'un produit saisonnier particulier est une variable aléatoire discrète X telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}},$$

où $r > 0$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.
3. On dispose d'un stock de n produits, déterminer la probabilité de rupture de stock, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > n)$ en fonction de r et n.

1. On a déjà $\mathbb{P}(X = k) \geqslant 0$ pour tout k. Il s'agit de vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} \;=\; \frac{1}{1+r} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{r}{1+r}\right)^k \;\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{1+r} \frac{1}{1-\frac{r}{1+r}} \;=\; \frac{1}{1+r-r} \;=\; 1,$$

car on reconnaît une somme géométrique convergente, du fait que $\frac{r}{1+r} \in [0, 1[$. On a donc bien défini une loi de probabilité.

2. Pour étudier si X admet une espérance, on s'intéresse à la convergence absolue, qui équivaut ici à la convergence, de la série $\sum k\,\mathbb{P}(X = k)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{r}{(1+r)^2}\left(\frac{r}{1+r}\right)^{k-1} \quad &= \quad \frac{r}{(1+r)^2} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{r}{1+r}\right)^{k-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{r}{(1+r)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{r}{1+r}\right)^2} \;=\; \frac{r}{(1+r-r)^2} \;=\; r, \end{aligned}$$

car on reconnaît une série géométrique dérivée convergente, toujours parce que $\frac{r}{1+r} \in [0, 1[$. Ainsi, X admet une espérance, et $\mathbb{E}(X) = r$.

Pour étudier si X admet un moment d'ordre 2, considérons la série $\sum k^2\,\mathbb{P}(X = k)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) \quad &= \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} \;=\; \sum_{k=1}^{n} \big(k(k-1)+k\big) \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} + \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} \\ &= \quad \frac{r^2}{(1+r)^3} \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \left(\frac{r}{1+r}\right)^{k-2} + \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{r^2}{(1+r)^3} \frac{2}{\left(1-\frac{r}{1+r}\right)^3} + \mathbb{E}(X) \;=\; \frac{2r^2}{(1+r-r)^3} + r \;=\; 2r^2 + r, \end{aligned}$$

car on reconnaît à nouveau une série géométrique dérivée convergente. Ainsi, X a un moment d'ordre 2, et $\mathbb{E}(X^2) = r(2r + 1)$. La variable aléatoire X admet donc une variance, qui vaut

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \;=\; 2r^2 + r - r^2 \;=\; r(r+1).$$

On peut retrouver tous ces résultats directement en remarquant que $X + 1$ *suit la loi géométrique de paramètre* $\frac{1}{1+r}$.

3. La rupture de stock intervient lorsque la demande dépasse le stock, on cherche donc $\mathbb{P}(X > n)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}} &= \frac{1}{1+r}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{r}{1+r}\right)^k \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r}{1+r}\right)^{n+1}\frac{1}{1-\frac{r}{1+r}} \\ &= \left(\frac{r}{1+r}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

N.B. On peut aussi trouver le résultat en écrivant $\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}}$.

Ainsi, la probabilité de rupture de stock est de $\left(\frac{r}{1+r}\right)^{n+1}$.

Exercice 2. On considère un jeu vidéo qui contient une infinité de niveaux. Le jeu commence au niveau 1, et il faut réussir un niveau pour passer au suivant. Le jeu s'arrête quand on a échoué à un certain niveau. On suppose que la probabilité de réussir le niveau $k \in \mathbb{N}^\star$ sachant que l'on parvient à ce niveau est $\frac{1}{k}$.
Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de niveaux franchis par le joueur au moment où le jeu s'arrête, si le jeu s'arrête.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
2. On admet temporairement que le jeu s'arrête presque sûrement. Montrer que $X + 1$ admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}(X + 1)$. En déduire que $\mathbb{E}(X)$.
3. Montrer que $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}((X - 1)(X + 1))$. En déduire que X admet une variance, et calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$, et en déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, on note A_i l'événement "le joueur réussit le niveau i". Si $k \in \mathbb{N}^\star$, la formule des probabilités composées donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A_1 \cap \dots A_k \cap \overline{A_{k+1}}) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap\dots\cap A_{k-1}}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_1\cap\dots A_k}(\overline{A_{k+1}}) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k!}\,\frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

2. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} |k+1|\,\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{(k+1)k}{(k+1)!} = \sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!}$ converge : on reconnaît une série exponentielle.
Le théorème de transfert assure alors que $X + 1$ admet une espérance, et on a alors

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(X) + 1 = \mathrm{e}$, donc $\mathbb{E}(X) = \mathrm{e} - 1$.
3. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} |(k-1)(k+1)|\,\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k\geqslant 2}\frac{(k-1)k(k+1)}{(k+1)!} = \sum\limits_{k\geqslant 2}\frac{1}{(k-2)!}$ est exponentielle donc convergente.

Toujours par le théorème de transfert, on en déduit que $(X-1)(X+1)$ admet une espérance, et

$$\mathbb{E}\big((X-1)(X+1)\big) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k+1)\,\mathbb{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{(k-2)!} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \;=\; \mathrm{e}.$$

Ainsi $X^2-1=(X-1)(X+1)$ admet une espérance, et $\mathbb{E}(X^2-1)=\mathrm{e}$. Ceci donne alors $\mathbb{E}(X^2)=\mathrm{e}+1$. En particulier, comme X^2 admet une espérance, X admet une variance. Par ailleurs,

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 \;=\; (\mathrm{e}+1)-(\mathrm{e}-1)^2 \;=\; \mathrm{e}(3-\mathrm{e}).$$

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} \;=\; \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!} \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right) \;=\; 1-\frac{1}{(n+1)!}$$

car la somme est télescopique. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$, ce qui donne $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$.

Comme l'événement A : "le jeu ne s'arrête pas" et les événements $[X=k]$ pour $k\in\mathbb{N}^\star$ forment un système complet d'événements, on a

$$\mathbb{P}(A)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=0,$$

donc le jeu s'arrête presque sûrement.