DM 20

à rendre pour le 30.04.

Exercice 1. On estime que la demande d'un produit saisonnier particulier est une variable aléatoire discrète X telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}},$$

où $r > 0$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier qu'on a bien défini une loi de probabilité.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Une variance ? Si oui, les calculer.
3. On dispose d'un stock de n produits, déterminer la probabilité de rupture de stock, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X > n)$ en fonction de r et n.

Exercice 2. On considère un jeu vidéo qui contient une infinité de niveaux. Le jeu commence au niveau 1, et il faut réussir un niveau pour passer au suivant. Le jeu s'arrête quand on a échoué à un certain niveau.
On suppose que la probabilité de réussir le niveau $k \in \mathbb{N}^\star$ sachant que l'on parvient à ce niveau est $\frac{1}{k}$.
Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de niveaux franchis par le joueur au moment où le jeu s'arrête, si le jeu s'arrête.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathbb{P}\left(X = k\right) = \dfrac{k}{(k+1)!}$.
2. On admet temporairement que le jeu s'arrête presque sûrement. Montrer que $X + 1$ admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}\left(X + 1\right)$. En déduire que $\mathbb{E}\left(X\right)$.
3. Montrer que $(X-1)(X+1)$ admet une espérance, et calculer $\mathbb{E}\left(\left(X-1\right)\left(X+1\right)\right)$. En déduire que X admet une variance, et calculer $\mathbb{V}(X)$.
4. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$, et en déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.
