DM 21

Exercice 1.

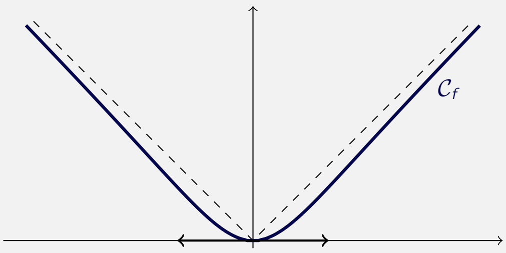
1. À l'aide de de la formule de Taylor-Young, calculer le développement limité en 0 de $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 3.
2. On souhaite retrouver ce résultat à l'aide des développements limités usuels.
   a. Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.
   b. En déduire le développement de tan à l'ordre 3 en 0.

1. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et on a pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$f'(x) = 1 + \tan^2 x, \quad f''(x) = 2\tan x(1+\tan^2 x), \quad f'''(x) = 2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x).$$
Ainsi, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = 2$. D'après la formule de Taylor-Young, on obtient alors
$$\tan x \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{6}\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \;=\; x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$
2. *a.* On a $\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$, et $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \mathrm{o}\left(u^3\right)$, donc
$$\frac{1}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$
En effet, si $u = -\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$, alors on a $u^2 = \mathrm{o}\left(x^3\right)$, et $u^3 = \mathrm{o}\left(x^3\right)$.
   b. D'après la question précédente, on a par produit de développements limités :
$$\tan x \;=\; \sin x\,\frac{1}{\cos x} \;=\; \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \;=\; x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Exercice 2. On considère la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}},$$
et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Étudier le comportement asymptotique de f en $-\infty$ et en $+\infty$, on précisera les éventuelles asymptotes.

On remarque pour commencer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire : $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On par ailleurs pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = |x| = x$, donc
$$f(x) \;=\; \sqrt{\frac{x^2}{1+\frac{1}{x^2}}} \;=\; x\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} \;=\; x\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$
On peut donc utiliser le développement limité $\frac{1}{\sqrt{1+u}} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + \mathrm{o}(u)$ avec $u = \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \;=\; x - \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, $f(x) - x \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$. Par conséquent, la droite $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$, et comme $-\frac{1}{2x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
Comme la fonction est paire, on en déduit que la droite $y = -x$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote. Une étude de la fonction mène à obtenir l'allure de courbe suivante :



Exercice 3. Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $1-p$. On propose l'expérience suivante pour "rééquilibrer" la pièce. L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives. Chaque partie consiste à lancer la pièce deux fois de suite.

- Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat, on refait une partie,
- Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

1. Déterminer la probabilité qu'on obtienne deux fois le même résultat à une partie.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note F_k l'événement "le jeu s'arrête à la k-ième partie, et on obtient Face", et P_k l'événement "le jeu s'arrête à la k-ième partie, et on obtient Pile". Déterminer $\mathbb{P}(F_k)$ et $\mathbb{P}(P_k)$.
   On pourra introduire les événements A_i : "on obtient deux fois le même résultat à la i-ième partie", pour chaque entier i.
3. En déduire la probabilité des événements F : "le jeu s'arrête et on obtient Face" et P : "le jeu s'arrête et on obtient Pile". Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?

1. On introduit les événements F_i^1 : "on obtient Face au premier lancer de la k-ième partie", et F_i^2 : "on obtient Face au second lancer de la k-ième partie". Pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, la probabilité d'obtenir deux fois le même résultat à la partie i est donnée par
$$\mathbb{P}\left(F_i^1 \cap F_i^2 \sqcup \overline{F}_i^1 \cap \overline{F}_i^2\right) = \mathbb{P}\left(F_i^1 \cap F_i^2\right) + \mathbb{P}\left(\overline{F}_i^1 \cap \overline{F}_i^2\right) = (1-p)^2 + p^2$$
par indépendance des lancers.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. On remarque que F_k est réalisé ssi on a obtenu les mêmes résultats aux $k-1$ premières parties, puis Pile et Face.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_k) &= \mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{F}_k^1 \cap F_k^2\right) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\ldots\,\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{k-2}}(A_{k-1})\,\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}}\left(\overline{F}_k^1 \cap F_k^2\right) \\ &= \left((1-p)^2+p^2\right)^{k-1} p\,(1-p).\end{aligned}$$
De manière analogue, comme P_k est réalisé ssi on a obtenu les mêmes résultats aux $k-1$ premières parties, puis Face et Pile, on obtient $\mathbb{P}(P_k) = \left((1-p)^2+p^2\right)^{k-1}(1-p)\,p = \mathbb{P}(F_k)$.

3. On a $F = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^\star} F_k$, et $P = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}^\star} P_k$

$$\mathbb{P}(F) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(F_k) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2+p^2\right)^{k-1} p\,(1-p) \;=\; p\,(1-p) \sum_{l=0}^{+\infty} \left((1-p)^2+p^2\right)^{l}$$

avec le changement d'indice $l = k-1$. Ainsi, on a

$$\mathbb{P}(F) \;=\; p\,(1-p)\,\frac{1}{1-((1-p)^2-p^2)} \;=\; \frac{2p\,(1-p)}{2p-2p^2} \;=\; \frac{1}{2}.$$

Comme $\mathbb{P}(F_k) = \mathbb{P}(P_k)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$.

On note B l'événement "le jeu ne s'arrête pas". Comme F, P et B forment un système complet d'événements, on a $\mathbb{P}(B) = 1-(\mathbb{P}(P)+\mathbb{P}(F) = 0$. La probabilité que le jeu ne s'arrête pas est nulle.