DM 21

à rendre pour le 07.05.

Exercice 1.

1. À l'aide de de la formule de Taylor-Young, calculer le développement limité en 0 de $x \mapsto \tan x$ à l'ordre 3.
2. On souhaite retrouver ce résultat à l'aide des développements limités usuels.
   a. Calculer un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.
   b. En déduire le développement de tan à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

, et on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Étudier le comportement asymptotique de f en $-\infty$ et en $+\infty$, on précisera les éventuelles asymptotes.

Exercice 3. Une pièce truquée donne Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $1-p$. On propose l'expérience suivante pour "rééquilibrer" la pièce. L'expérience est constituée d'une suite de parties consécutives. Chaque partie consiste à lancer la pièce deux fois de suite.

- Si à l'issue d'une partie on obtient deux fois le même résultat, on refait une partie,
- Si à l'issue d'une partie on obtient deux résultats différents, alors on arrête l'expérience et on rend le résultat du dernier lancer.

1. Déterminer la probabilité qu'on obtienne deux fois le même résultat à une partie.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note F_k l'événement "le jeu s'arrête à la k-ième partie, et on obtient Face", et P_k l'événement "le jeu s'arrête à la k-ième partie, et on obtient Pile". Déterminer $\mathbb{P}(F_k)$ et $\mathbb{P}(P_k)$.
   On pourra introduire les événements A_i : "on obtient deux fois le même résultat à la i-ième partie", pour chaque entier i.
3. En déduire la probabilité des événements F : "le jeu s'arrête et on obtient Face" et P : "le jeu s'arrête et on obtient Pile". Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête pas ?
