DM 22

Exercice 1.

1. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0)=(1,1), \quad f(0,1,0)=(0,1) \quad \text{et} \quad f(0,0,1)=(-1,1).$$

   a. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.

   b. Déterminer le noyau de f, puis le rang de f.

   c. L'application f est-elle injective ? Surjective ?

2. Déterminer le noyau de l'application linéaire

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z+t,\ x-y+z-t,\ y+t) \end{array}$$

   Quel est le rang de g ? L'application g est-elle injective ? Surjective ?

3. *a.* Déterminer l'image de l'application linéaire $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y,\ x+y,\ x-y) \end{array}$.

   b. L'application h est-elle injective ? Surjective ?

1. *a.* On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, comme $(x,y,z)=xe_1+ye_2+ze_3$, on a

$$f(x,y,z)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=x\,(1,1)+y\,(0,1)+z\,(-1,1)\ =\ (x-z,\,x+y+z).$$

   b. On a $f(x,y,z)=(0,0,0)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{l} x=z \\ y=-2z \end{array}\right.$.

   Ainsi, $\ker f=\{(z,-2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,-2,1))$, et $\dim(\ker f)=1$.

   Le théorème du rang entraîne alors que $\mathrm{rg}\, f=\dim\mathbb{R}^3-\dim(\ker f)=2$.

   c. Comme $\ker f\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective. Comme $\mathrm{rg}\, f=\dim\mathbb{R}^2$, f est surjective.

2. On cherche $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tel que $g(x,y,z,t)=0_{\mathbb{R}^3}$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0 \\ x-y+z-t &=& 0 \\ y+\quad t &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t &=& 0 \\ -2y\quad -2t &=& 0 \\ y+\quad t &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -t \end{array}\right.$$

   Finalement, on a $\ker g=\{(z,-t,-z,t),\ z,t\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,-1,0),\,(0,-1,0,1))$.

   On en déduit que $\dim(\ker g)=2$ car la famille libre $((1,0,-1,0),\,(0,-1,0,1))$ est une base de $\ker g$. Ainsi, $\mathrm{rg}\, g=\dim\mathbb{R}^4-\dim(\ker g)=2$ par le théorème du rang.

   Comme $\ker g\neq\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, g n'est pas injective. Comme $\mathrm{rg}\, g<\dim\mathbb{R}^3$, g n'est pas non plus surjective.

3. *a.* On a $\mathrm{Im}\, h=\mathrm{Vect}((h(1,0),\,h(0,1))=\mathrm{Vect}((3,1,1),\,(-1,1,-1))$.

   b. On a $\mathrm{rg}\, h=\dim(\mathrm{Im}\, h)=2$ d'après ce qui précède. Comme $\mathrm{rg}\, h=\dim\mathbb{R}^2$, l'application h est injective. En revanche, $\mathrm{rg}\, h\neq\mathbb{R}^3$, donc h n'est pas surjective.

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.

1. Justifier que si $Q\in\mathbb{R}[x]$, alors $\deg(Q(x)+xQ''(x))=\deg Q$.

2. On introduit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ & Q & \mapsto & Q(x) + xQ''(x) \end{array}$$

   a. Montrer que Φ est linéaire.

   b. Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x) + xQ''(x) = x^n$.

1. Si $Q \in \mathbb{R}[x]$, on a

$$\deg(x\,Q''(x)) = \deg(x) + \deg Q''.$$

Comme $\deg Q'' \leqslant \deg(Q) - 2$, on en déduit que $\deg(x\,Q''(x)) \leqslant 1 + \deg(Q) - 2 = \deg(Q) - 1$.
Par conséquent, comme $\deg(x\,Q''(x)) < \deg Q - 1$, on a

$$\deg(Q(x) + xQ''(x)) \;=\; \deg Q.$$

Autre rédaction : on pouvait aussi écrire Q sous la forme $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$, où $d \in \mathbb{N}$, et remarquer qu'alors $Q(x) + xQ''(x) = a_d x^d + R(x)$, où $\deg R \leqslant d - 1$.

2. *a.* D'après la question 1, $\deg(\Phi(Q)) = \deg Q$, donc Φ est bien définie. Montrons qu'elle est linéaire : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(x) + x(\lambda P + \mu Q)''(x) \\ &= \lambda(P(x) + xP''(x)) + \mu(Q(x) + xQ''(x)) \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q), \end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.

On pouvait aussi remarquer que Φ est somme de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[x]}$ et d'une application linéaire composée.

   b. Pour montrer que Φ un automorphisme, il suffit de montrer que Φ est injective, ou de montrer qu'elle est surjective.

   – *1ère méthode.* Nous allons montrer que $\ker \Phi = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$, ce qui donnera l'injectivité. Supposons que $Q \in \ker \Phi$, c'est-à-dire que $Q(x) + x\,Q''(x) = 0_{\mathbb{R}[x]}$. D'après ce qui précède on a alors $\deg Q = \deg Q(x) + x\,Q''(x) = -\infty$, ce qui donne que $Q = 0_{\mathbb{R}[x]}$. Ainsi, $\ker \Phi = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$.

   – *2ème méthode.* Nous allons montrer que $\operatorname{Im} \Phi = \mathbb{R}_n[x]$, ce qui donnera que Φ est surjective.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Phi &= \operatorname{Vect}\left(\Phi(1), \Phi(x), \Phi(x^2), \dots, \Phi(x^n)\right) \\ &= \operatorname{Vect}\left(1,\ x,\ x^2 + 2x,\ \dots,\ x^n + n(n-1)x^{n-1}\right) \;=\; \mathbb{R}_n[x], \end{aligned}$$

car la famille $\left(1,\ x,\ x^2 + 2x,\ \dots,\ x^n + n(n-1)x^{n-1}\right)$ est échelonnée en degré, donc libre, et de cardinal $n + 1$: c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

   c. Comme $\deg Q(x) + x\,Q''(x) = \deg Q$, on déduit que les seuls polynômes qui vérifient $Q(x) + x\,Q''(x) = x^n$ sont de degré n, donc appartiennent à $\mathbb{R}_n[x]$.

Comme Φ est un automorphisme, on sait que $x^n \in \mathbb{R}_n[x]$ a un unique antécédent par Φ, c'est-à-dire qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\Phi(Q) = Q(x) + x\,Q''(x) = x^n$. Ceci conclut.