# DM 22

à rendre pour le 14.05.

---

**Exercice 1.**

1. Soit $f$ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (1,1), \quad f(0,1,0) = (0,1) \quad \text{et} \quad f(0,0,1) = (-1,1).$$

   *a.* Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(x,y,z)$.

   *b.* Déterminer le noyau de $f$, puis le rang de $f$.

   *c.* L'application $f$ est-elle injective ? Surjective ?

2. Déterminer le noyau de l'application linéaire

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y+z+t,\ x-y+z-t,\ y+t) \end{array}$$

   Quel est le rang de $g$ ? L'application $g$ est-elle injective ? Surjective ?

3. *a.* Déterminer l'image de l'application linéaire $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (3x-y,\ x+y,\ x-y) \end{array}$.

   *b.* L'application $h$ est-elle injective ? Surjective ?

---

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. Justifier que si $Q \in \mathbb{R}[x]$, alors $\deg(Q(x) + xQ''(x)) = \deg Q$.

2. On introduit l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \to & \mathbb{R}_n[x] \\ Q & \mapsto & Q(x) + xQ''(x) \end{array}$$

   *a.* Montrer que $\Phi$ est linéaire.

   *b.* Montrer que $\Phi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

3. En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x) + xQ''(x) = x^n$.

---