DM 23

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\,(1, 1, 1)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $p(u)$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G, et $u = (2, 2, 3)$.
3. Déterminer $q(u)$, où q est le projecteur sur G parallèlement à F, et $v = (1, -2, 0)$.

1. On a $F = \{(x, y, x + y),\ x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,(1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Par ailleurs,
$$\text{rg}((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)) = \text{rg}((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, -1)) = 3,$$
donc la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. D'après ce qui précède, F et G sont des sev supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Commençons par écrire la décomposition de $u = (2, 2, 3)$ sous la forme $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$: on remarque que $u = (1, 1, 2) + (1, 1, 1)$. Comme $(1, 1, 2) \in F$ et $(1, 1, 1) \in G$, on a $u_F = (1, 1, 2)$, et $u_G = (1, 1, 1)$.

   On peut aussi chercher $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u = a\,(1, 0, 1)+b\,(0, 1, 1)+c\,(1, 1, 1) = (a+c,\ b+c,\ a+b+c)$ en résolvant un système.

   Ainsi, $p(u) = u_F = (1, 1, 2)$.
3. On remarque que $v = (1, -2, 0) = (-1, -1, -1)+(2, -1, 1)$, donc $v_F = (2, -1, -1)$ et $v_G = -(1, 1, 1)$. Par conséquent, on a $q(v) = v_G = -(1, 1, 1)$.

   Comme ci-dessus, on peut trouver la décomposition de v en résolvant un système.

Exercice 2. Soit l'endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x])$ défini par $\varphi : P \mapsto P + P'$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculer A^{-1}.
3. En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(x) + P'(x) = x^2 + x + 1$.

1. Comme $\varphi(1) = 1$, $\varphi(x) = x + 1$ et $\varphi(x^2) = x^2 + 2x$, on en déduit
$$A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \mathscr{B} = (1, x, x^2).$$
2. La matrice A est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible. On en déduit que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

   On détermine A^{-1} en fixant $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et en résolvant le système
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x + y = a \\ y + 2z = b \\ z = c \end{cases}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = a - b + 2c \\ y = b - 2c \\ z = c \end{cases}$$
   Ainsi, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui donne $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On cherche $P = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $\varphi(P) = x^2 + x + 1$. Or on sait

$$\varphi(P) = x^2 + x + 1 \;\Leftrightarrow\; A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le seul polynôme qui est solution de l'équation est $P(x) = x^2 - x + 2$.

Exercice 3. Soit φ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = 0$.

1. *a.* Montrer que $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varphi$.

   b. En déduire que $\dim(\operatorname{Im}\varphi) = 1$ et $\dim(\ker\varphi) = 2$.

2. *a.* Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On note $v = \varphi(u)$.

   b. Justifier qu'il existe un vecteur w tel que (v, w) soit une base de $\ker\varphi$. Montrer que la famille (v, w, u) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de φ dans cette base ?

1. *a.* Soit $v \in \operatorname{Im}\varphi$, on sait donc qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = \varphi(u)$. Par conséquent, on a $\varphi(v) = \varphi(\varphi(u)) = \varphi^2(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc $v \in \ker\varphi$, et $\operatorname{Im}\varphi \subset \ker\varphi$.

   b. Comme φ n'est pas l'application nulle, on a $\ker\varphi \neq \mathbb{R}^3$, donc $\dim\ker\varphi \leqslant 2$.

   Supposons qu'on ait $\dim\ker\varphi \leqslant 1$. On a alors $\dim\operatorname{Im}\varphi \leqslant \dim\ker\varphi \leqslant 1$ d'après la question précédente. Ainsi, $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi \leqslant 2$, ce qui est impossible car $\dim\operatorname{Im}\varphi + \dim\ker\varphi = 3$ d'après le théorème du rang.

   On en déduit donc que $\dim\ker\varphi = 2$, et donc $\dim\operatorname{Im}\varphi = 1$, d'après le théorème du rang.

2. *a.* Comme φ n'est pas l'application nulle, il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

   b. On a $v \in \operatorname{Im}\varphi$, donc $v \in \ker\varphi$. Du fait que $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\dim\ker\varphi = 2$, on peut compléter la famille (v) en une base (v, w) de $\ker\varphi$.

   Montrons que la famille (v, w, u) est libre : on suppose que $av + bw + cu = 0_{\mathbb{R}^3}$, cherchons à montrer que $a = b = c = 0$. En composant l'égalité précédente par φ, on obtient par linéarité que $c\varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, comme $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, on a $c = 0$.

   On a alors $av + bw = 0_{\mathbb{R}^3}$, donc $a = b = 0$, car (v, w) est une famille libre. Ceci achève de montrer que (v, w, u) est libre. Comme la famille (v, w, u) est de bon cardinal, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   On note $\mathcal{B} = (v, w, u)$. Comme on a $\varphi(v) = \varphi(w) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et $\varphi(u) = v$, on obtient

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \\ v \\ w \\ u \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v & w & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$
