

DM 23

à rendre pour le 21.05.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$ on pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}(1, 1, 1)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $p(u)$, où p est le projecteur sur F parallèlement à G , et $u = (2, 2, 3)$.
3. Déterminer $q(u)$, où q est le projecteur sur G parallèlement à F , et $v = (1, -2, 0)$.

Exercice 2. Soit l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x])$ défini par $\varphi : P \mapsto P + P'$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Calculer A^{-1} .
3. En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $P(x) + P'(x) = x^2 + x + 1$.

Exercice 3. Soit φ un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = 0$.

1.
 - a. Montrer que $\text{Im } \varphi \subset \ker \varphi$.
 - b. En déduire que $\dim(\text{Im } \varphi) = 1$ et $\dim(\ker \varphi) = 2$.
 2.
 - a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. On note $v = \varphi(u)$.
 - b. Justifier qu'il existe un vecteur w tel que (v, w) soit une base de $\ker \varphi$. Montrer que la famille (v, w, u) est une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de φ dans cette base ?
-