DS 1

07.09.2024

Exercice 1. Les questions 1. 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=x-\ln(1+x)$, pour tout $x\in]-1,+\infty[$.
   a. Calculer la dérivée de f sur $]-1,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f (on ne cherchera pas à calculer la limite de f en $+\infty$).
   b. En déduire que $\ln(1+x)\leqslant x$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$.

2. Soit la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)-\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis montrer que f est la fonction identité de $\mathbb{R}$, c'est à dire que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_1=1$ et $u_{n+1}=1+\dfrac{u_n}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
   a. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $1\leqslant u_n\leqslant 2$.
   b. En déduire que $\frac{1}{n}\leqslant u_n-1\leqslant\frac{2}{n}$ pour tout $n\geqslant 2$, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On suppose qu'on dispose de trois coffrets, notés respectivement A, B et C et qu'un seul d'entre eux contient une pièce. Sur chaque coffret figure une inscription :
   - sur le coffret A est inscrit "*la pièce est dans ce coffret*",
   - sur le coffret B est inscrit "*la pièce n'est pas dans ce coffret*",
   - sur le coffret C est inscrit "*la pièce n'est pas dans le coffret A*".

   Par ailleurs, on sait qu'*une inscription au plus est vraie*. Déterminer dans quel coffret se trouve la pièce, et le justifier par une démonstration rigoureuse.

---

1. *a.* Comme $1+x>0$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$, la fonction f est bien définie sur $]-1,+\infty[$. Elle est par ailleurs dérivable sur $]-1,+\infty[$, et pour tout $x\in]-1,+\infty[$, on a $f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$.
   Comme pour tout $x\in]-1,+\infty[$, $1+x\geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de x. Par conséquent, f' est négative sur $]-1,0]$ et positive sur $[0,+\infty[$. Par ailleurs, on a $f(0)=0$, d'où le tableau de variation suivant.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   b. D'après le tableau de variation de la question précédente, la fonction f atteint son minimum en 0. Ainsi, pour tout $x\in]-1,+\infty[$, on a $f(x)\geqslant f(0)=0$, c'est-à-dire $x-\ln(1+x)\geqslant 0$. On a donc bien $x\geqslant\ln(1+x)$ pour tout $x\in]-1,+\infty[$.

2. La fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, si $x\in\mathbb{R}$, on a $1+\mathrm{e}^x>0$ et $1+\mathrm{e}^{-x}>0$, car la fonction exp est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\ln(1+\mathrm{e}^x)$ et $\ln(1+\mathrm{e}^{-x})$ sont bien définis. Finalement, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Montrons maintenant que f est la fonction identité. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a
   $$f(x)=\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}+1)}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)=\ln(\mathrm{e}^x)=x,$$
   ce qui conclut.

3. *a.* Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition "$1\leqslant u_n\leqslant 2$".

Initialisation : Comme $u_1 = 1$, on a $1 \leqslant u_1 \leqslant 2$, et la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également. On déduit de $\mathcal{P}(n)$ que $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{u_n}{n+1} \leqslant \frac{2}{n+1}$, donc

$$1 \leqslant 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant 1 + \frac{u_n}{n+1} \leqslant 1 + \frac{2}{n+1}.$$

Par ailleurs, comme $n+1 \geqslant 2$, on a $\frac{2}{n+1} \leqslant 1$, ce qui entraîne $1 + \frac{2}{n+1} \leqslant 2$. Finalement, on a bien $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Par récurrence, la proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

b. Soit $n \geqslant 2$. On sait que $u_n - 1 = \frac{u_{n-1}}{n}$. Or la question précédente donne $1 \leqslant u_{n-1} \leqslant 2$. On en déduit alors que $\frac{1}{n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{2}{n}$.

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, le théorème d'encadrement donne $u_n - 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers 1.

4. Raisonnons par l'absurde : supposons que la pièce se trouve dans le coffret A. Alors les inscriptions sur les coffrets A et B sont vraies, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. On en déduit que la pièce n'est dans le coffret A.

   Par conséquent, l'inscription sur le coffret C est vraie. Comme une seule inscription est vraie, les deux autres sont fausses. On déduit alors de l'inscription sur le coffret B que la pièce se trouve dans le coffret B.

Exercice 2.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 qu'on précisera.

   b. Verifier que les réels x_1 et x_2 sont strictement positifs.

2. *a.* En posant $y = \mathrm{e}^x$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 = 0$. On exprimera les solutions en fonction de x_1 et x_2.

   b. Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 > 0$.

3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. L'objectif est de calculer le rapport $x = \frac{a}{b}$.

   a. Montrer que $\ln \frac{b(x+1)}{3} = \ln(b\sqrt{x})$

   b. En déduire les valeurs possibles de x.

1. *a.* Comme la fonction f est polynomiale de degré 2, on peut trouver les racines en calculant le discriminant du polynôme associé :

   $$\Delta = 7^2 - 4 = 45 > 0.$$

   On en déduit que f a deux racines distinctes, qui sont données par $x_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

   b.
   – Comme la fonction racine est strictement croissante, on a $7 = \sqrt{49} > \sqrt{45}$. Par conséquent, $7 - 3\sqrt{5} = 7 - \sqrt{45} > 0$, et $x_1 > 0$.
   – Comme $7 + 3\sqrt{5} > 0$, on a aussi $x_2 > 0$.

2. *a.* Si on pose $y = \mathrm{e}^x$, on remarque qu'on a $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 = 0$ si et seulement si $y^2 - 7y + 1 = 0$. Or cette dernière équation a pour seules solutions x_1 et x_2.

   Ainsi, x est solution de l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 = 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x \in \{x_1, x_2\}$. Comme x_1 et x_2 sont dans $\mathbb{R}_+^\star$, ceci équivaut à $x \in \{\ln x_1, \ln x_2\}$. L'équation a donc deux solutions : $\ln x_1$ et $\ln x_2$.

b. On sait que $y^2-7y+1>0$ si et seulement si $y<x_1$ ou $y>x_2$. Dans notre cas, $y=\mathrm{e}^x$, et on obtient que $\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^x+1>0$ ssi $\mathrm{e}^x<x_1$ ou $\mathrm{e}^x>x_2$.

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\mathrm{e}^x<x_1 \Leftrightarrow x<\ln x_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x>x_2 \Leftrightarrow x>\ln x_2.$$

On obtient le tableau de signe

x	$-\infty$		$\ln x_1$		$\ln x_2$		$+\infty$
$\mathrm{e}^{2x}-7\mathrm{e}^x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et la solution est donc $]-\infty,\ln x_1[\cup]\ln x_2,+\infty[$.

3. *a.* Il suffit de remarquer que $a=bx$, et de remplacer dans la relation de l'énoncé :

$$\ln\frac{b(x+1)}{3} = \frac{1}{2}(\ln bx+\ln b) = \ln b+\frac{1}{2}\ln x = \ln(b\sqrt{x}).$$

b. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a

$$\begin{aligned}\ln\frac{b(x+1)}{3}=\ln(b\sqrt{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{b(x+1)}{3}=b\sqrt{x}\\ &\Leftrightarrow \quad b(x+1)=3b\sqrt{x}\\ &\Leftrightarrow \quad x+1=3\sqrt{x} \ \text{ car } b\neq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2=9x \ \text{ car } x\geqslant 0 \text{ d'où } x+1\geqslant 0, \text{ et } 3\sqrt{x}\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-7x+1=0.\end{aligned}$$

D'après la question 1., il y a donc exactement deux solutions : x_1 et x_2.

Exercice 3. Soient λ un réel strictement négatif et la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x)=\mathrm{e}^{\lambda x^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1. Montrer que f_λ est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f_λ en $+\infty$ puis en $-\infty$. On rappelle que $\lambda<0$.
3. Etudier les variations de la fonction f_λ.
4. Soit y un réel dans l'intervalle $]0,1[$. On considère l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ donnée par :

$$f_\lambda(x) = y. \tag{E}$$

a. Sans chercher à les calculer, montrer que l'équation (E) admet exactement deux solutions.

b. Déterminer les deux solutions de l'équation (E), exprimées en fonction de y.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $f_\lambda(-x)=\mathrm{e}^{\lambda(-x)^2}=\mathrm{e}^{\lambda x^2}=f_\lambda(x)$. On en déduit que f est une fonction paire.
2. Comme $\lambda<0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\lambda x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\lambda x^2=-\infty$. Comme d'autre part $\lim\limits_{y\to-\infty}\mathrm{e}^y=0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}f_\lambda(x) = \lim_{x\to-\infty}f_\lambda(x)=0.$$

3. Par composition de fonctions dérivables, la fonction f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f_\lambda'(x) = 2\lambda x\mathrm{e}^{\lambda x^2}$ pour tout x, ce qui entraîne que f_λ' est négative sur $\mathbb{R}_+$, puis que f_λ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On déduit par parité que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$, d'où les variations de f_λ :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_\lambda(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. *a.* Soit $y \in]0,1[$, montrons qu'il existe exactement deux valeurs de x telles que $f_\lambda(x) = y$.
   - La fonction f_λ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions continues.
   - On a $f_\lambda(0) = 1 > y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 < y$.

   Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires assure que f_λ admet un antécédent $x \in]0,+\infty[$. Par ailleurs, comme f_λ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, cet antécédent est unique.

   Par parité de f_λ, y admet exactement un antécédent dans $\mathbb{R}_-^\star$ également. Finalement, on a bien montré que y avait deux antécédents exactement dans $\mathbb{R}$.

   b. On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{\lambda x^2} = y$. On remarque en composant par la fonction ln, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, que

$$\mathrm{e}^{\lambda x^2} = y \iff \lambda x^2 = \ln(y) \iff x^2 = \frac{\ln(y)}{\lambda}.$$

   Comme $\ln(y) < 0$ et $\lambda < 0$, on a $\frac{\ln(y)}{\lambda} > 0$, et il y a donc deux solutions à l'équation : $\sqrt{\frac{\ln(y)}{\lambda}}$ et $-\sqrt{\frac{\ln(y)}{\lambda}}$.

Exercice 4. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi :

- elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations),
- si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n, par convention, $p_0 = 0$. Par ailleurs, on désigne par R_n, l'événement : "la place est réservée au jour n".

1. *a.* Déterminer p_1.

   b. Représenter par un arbre faisant apparaître les événements R_1, $\overline{R}_1$, R_2 et $\overline{R}_2$ l'évolution des réservations jusqu'au jour 2 ($n = 2$), puis calculer p_2.

   c. À nouveau à l'aide d'un arbre faisant cette fois apparaître les événements R_n, $\overline{R}_n$, R_{n+1} et $\overline{R}_{n+1}$, montrer que :
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{5}.$$

2. L'objectif est désormais de calculer p_n en fonction de n puis de calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$

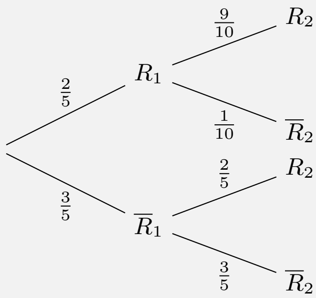
   a. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = p_n - \frac{4}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   b. En déduire v_n puis p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

   c. Calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. *a.* On a $p_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

   b. On obtient l'arbre suivant :

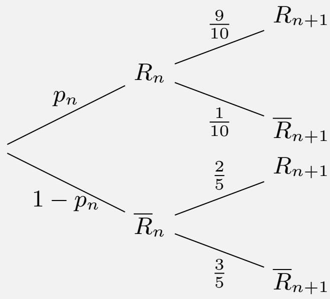


   On a alors $p_2 = \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}_{R_1}(R_2)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}_{\overline{R}_1}(R_2)\mathbb{P}(\overline{R}_1) = \frac{9}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.

   c. D'après l'énoncé, on a $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{9}{10}$, et $P_{\overline{R}_n}(R_{n+1}) = \frac{2}{5}$. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{n+1}) &= \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(R_n) + \mathbb{P}_{\overline{R}_n}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(\overline{R}_n) \\
&= \frac{9}{10}\mathbb{P}(R_n) + \frac{2}{5}(1 - \mathbb{P}(R_n)) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(R_n) + \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

   On peut bien sûr aussi s'aider d'un arbre pour retrouver cette relation.



2. *a.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}p_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{4}{5}\right) - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}v_n.$$

   On a donc bien montré que la suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.

   b. Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $v_0 = -\frac{4}{5}$, on en déduit que

$$p_n = v_n + \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

   c. Comme on sait que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{4}{5}$.

⋆ ⋆
⋆