DS 1

07.09.2024 – durée : 2h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Les questions 1. 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$, pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

   a. Calculer la dérivée de f sur $]-1,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f (on ne cherchera pas à calculer la limite de f en $+\infty$).

   b. En déduire que $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ puis montrer que f est la fonction identité de $\mathbb{R}$, c'est à dire que $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

   a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

   b. En déduire que $\frac{1}{n} \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$, puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On suppose qu'on dispose de trois coffrets, notés respectivement A, B et C et qu'un seul d'entre eux contient une pièce. Sur chaque coffret figure une inscription :

   – sur le coffret A est inscrit "*la pièce est dans ce coffret*",
   – sur le coffret B est inscrit "*la pièce n'est pas dans ce coffret*",
   – sur le coffret C est inscrit "*la pièce n'est pas dans le coffret A*".

   Par ailleurs, on sait qu'*une inscription au plus est vraie.* Déterminer dans quel coffret se trouve la pièce, et le justifier par une démonstration rigoureuse.

Exercice 2.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 qu'on précisera.

   b. Verifier que les réels x_1 et x_2 sont strictement positifs.

2. *a.* En posant $y = \mathrm{e}^x$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 = 0$. On exprimera les solutions en fonction de x_1 et x_2.

   b. Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^x + 1 > 0$.

3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$. L'objectif est de calculer le rapport $x = \frac{a}{b}$.

   a. Montrer que $\ln\frac{b(x+1)}{3} = \ln(b\sqrt{x})$

b. En déduire les valeurs possibles de x.

Exercice 3. Soient λ un réel strictement négatif et la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f_λ est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f_λ en $+\infty$ puis en $-\infty$. On rappelle que $\lambda < 0$.
3. Etudier les variations de la fonction f_λ.
4. Soit y un réel dans l'intervalle $]0,1[$. On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par :
$$f_\lambda(x) \;=\; y. \tag{E}$$
   a. Sans chercher à les calculer, montrer que l'équation (E) admet exactement deux solutions.
   b. Déterminer les deux solutions de l'équation (E), exprimées en fonction de y.

Exercice 4. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi :

- elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations),
- si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n, par convention, $p_0 = 0$. Par ailleurs, on désigne par R_n, l'événement : "la place est réservée au jour n".

1. *a.* Déterminer p_1.
   b. Représenter par un arbre faisant apparaître les événements R_1, $\overline{R}_1$, R_2 et $\overline{R}_2$ l'évolution des réservations jusqu'au jour 2 ($n = 2$), puis calculer p_2.
   c. À nouveau à l'aide d'un arbre faisant cette fois apparaître les événements R_n, $\overline{R}_n$, R_{n+1} et $\overline{R}_{n+1}$, montrer que :
$$p_{n+1} = \frac{1}{2}\,p_n + \frac{2}{5}.$$
2. L'objectif est désormais de calculer p_n en fonction de n puis de calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par
$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,p_n + \dfrac{2}{5}. \end{cases}$$
   a. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = p_n - \frac{4}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   b. En déduire v_n puis p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   c. Calculer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

⋆ ⋆
⋆