DS 2

⋆ ⋆ ⋆

Cours

1. Donner la définition de la fonction valeur absolue, et rappeler les deux inégalités triangulaires du cours.
2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   a. Traduire "f est croissante" par une proposition avec des quantificateurs.
   b. Écrire la négation de la proposition $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.
   c. Écrire la négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.
3. Écrire la contraposée de l'implication (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair).
4. Soient $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Expliciter les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ et préciser pour chacune d'elles le domaine de définition.
5. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier rigoureusement.
   a. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{9x^2 + 6x + 1} = 3x + 1$.
   b. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ ax^2 + bx = 0$.
   c. Si une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas paire, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$.

---

1. La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$

   Inégalités triangulaires : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, et $|y - x| \geqslant ||y| - |x||$.
2. *a.* "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$".
   b. "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 0$".
   c. "$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (f(x) = f(y))$ et $x \neq y$".
3. "n est impair $\Rightarrow$ n^2 est impair".
4. La fonction $g \circ f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0\} = \mathbb{R}_+$.

   La fonction $f \circ g : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x-1}}$ est définie sur $[1, +\infty[$.
5. *a.* C'est *faux* : si on pose $x = -1$, on a $3x + 1 = -2 < 0$, donc on n'a pas $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = 3x + 1$. On a montré que la négation de la proposition (c'est-à-dire $\exists x \in \mathbb{R},\ \sqrt{9x^2 + 6x + 1} \neq 3x + 1$) est vraie, donc la proposition est fausse.
   b. C'est *vrai* : Si on pose $x = 0$, alors pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on a $ax^2 + bx = 0$. Ceci montre la proposition.
   c. C'est *faux*. La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$. Pour contre-exemple, on peut choisir la fonction $f : x \mapsto x$ qui n'est pas paire. Si on pose $x = 0$, alors on a $f(x) = f(-x) = 0$. On a donc montré qu'il existait une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas paire et $x \in \mathbb{R}$ tel que que $f(x) = f(-x)$, ce qui est la négation de la proposition de l'énoncé.

Exercice 1 – Équations et inéquations

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *a.* Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue réelle y :

$$y^2 - 3y - 4 \;\geqslant\; 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'inéquation suivante, d'inconnue réelle x :

$$\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \;\geqslant\; 3.$$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$x - 2 \;=\; \sqrt{2x-1}.$$

   On pourra procéder par analyse-synthèse.

1. *a.* L'inéquation est valide pour tout réel. Le polynôme $y^2 - 3y - 4$ a deux racines réelles : -1 et 4. Par conséquent, on a

$$y^2 - 3y - 4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[.$$

   b. L'inéquation est valide pour tout réel. Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \geqslant 3 \Leftrightarrow (\mathrm{e}^x)^2 - 4 \geqslant 3\mathrm{e}^x \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{e}^x)^2 - 3\mathrm{e}^x - 4 \geqslant 0.$$

   D'après la question précédente,

$$\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^x \in]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[.$$

   Comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \geqslant 3 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^x \geqslant 4 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant \ln(4)$, en utilisant la stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^\star$. L'ensemble des solutions est donc $[\ln 4, +\infty[$.

2. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $2x - 1 \leqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \frac{1}{2}$, donc l'équation est valide sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
   On raisonne par analyse synthèse.
   - ⋆ *Analyse.* Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{2x-1} + 2$, ce qui se récrit $x - 2 = \sqrt{2x-1}$. *Donc*, en élevant au carré, on a $(x-2)^2 = 2x - 1$, ce qui se récrit $x^2 - 6x + 5 = 0$.
     Comme le polynôme $x^2 - 6x + 5$ a pour racines 1 et 5, on en déduit que les valeurs possibles pour x sont 1 et 5.
   - ⋆ *Synthèse.* On examine les deux candidats trouvés au terme de l'analyse.
     – Pour $x = 1$, on obtient $\sqrt{2 \times 1 - 1} + 2 = 3 \neq 1$ donc 1 n'est pas solution.
     – Pour $x = 5$, on obtient $\sqrt{2 \times 5 - 1} + 2 = 5$ donc 5 est solution.

   Finalement, l'équation admet une unique solution, qui est 5.
   N.B. : on aurait pu raisonner différemment, en résolvant séparément l'équation sur $[2, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 2[$.

Exercice 2 – Raisonnements

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$1 \times 2 \;+\; \ldots \;+\; (n-1) \times n \;=\; \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels dans $[0, 1]$ tels que $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. On veut montrer la proposition suivante :

$$\mathcal{P} \;:\; \exists i \in \{1, \ldots, n\},\; x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}.$$

a. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.

b. Calculer la somme $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$.

c. À l'aide des questions précédentes, montrer par l'absurde que $\mathcal{P}$ est vraie.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $1 \times 2 + \ldots + n \times (n-1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - ⋆ *Initialisation.* On a $\frac{2(2-1)(2+1)}{3} = 2 = 1 \times 2$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
   - ⋆ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on cherche à montrer $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire que
   $$1 \times 2 + \ldots + n\,(n+1) \;=\; \frac{(n+1)\,n\,(n+2)}{3}.$$
   On a
   $$1 \times 2 + \cdots + (n-1)\,n + n\,(n+1) = \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{3} + n\,(n+1),$$
   d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi,
   $$1 \times 2 + \ldots + n\,(n+1) \;=\; n\,(n+1)\left(\frac{n-1}{3} + 1\right) \;=\; \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3},$$
   donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc bien montré que pour tout $n \geqslant 2$, on a $1 \times 2 + \cdots + (n-1)\,n \;=\; \frac{n\,(n-1)\,(n+1)}{3}$.
2. *a.* Négation de $\mathcal{P}$: $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$.

   b. On a
   $$(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + (\cancel{x_3} - \cancel{x_2}) + \ldots + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) \;=\; x_n - x_0.$$

   c. On raisonne par l'absurde : on suppose que $\mathcal{P}$ est fausse, donc $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$ est vraie. Autrement dit $x_1 - x_0 > \frac{1}{n}$, $x_2 - x_1 > \frac{1}{n}$, …, $x_n - x_{n-1} > \frac{1}{n}$. Ainsi,
   $$\begin{aligned} x_n - x_0 &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) \\ &> \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ termes}} \;=\; n \times \frac{1}{n} \;=\; 1. \end{aligned}$$
   Or comme $0 \leqslant x_0 \leqslant x_n \leqslant 1$, on a $x_n - x_0 \leqslant 1$, et il y a contradiction. Nous avons donc bien montré que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

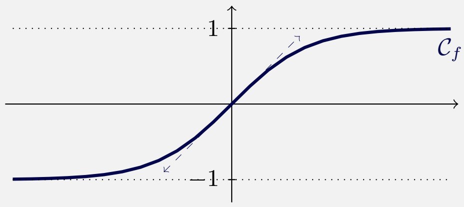
Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier la fonction

$$f \;:\; x \;\mapsto\; \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et en déduire sa limite lorsque x tend vers $-\infty$.
5. Calculer $f'(0)$ et tracer l'allure de la courbe de f.
6. Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

7. On fixe $y \in]-1,1[$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.
8. Justifier que $g : y \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$, définie sur $]-1,1[$, est la réciproque de la fonction f.
9. Tracer l'allure de la courbe de g sur le même graphique que celui de la question 5.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \neq 0$. Par conséquent, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ existe. Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = -f(x).$$
Ainsi, la fonction f est impaire.
3. La fonction f est dérivable comme quotient bien défini de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}. \end{aligned}$$
Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que f est strictement croissante.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x}(1 - \mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^{x}(1 + \mathrm{e}^{-2x})} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Par imparité, on en déduit alors que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.
5. On a $f'(0) = 1$. On déduit des questions précédentes l'allure de la courbe de f :

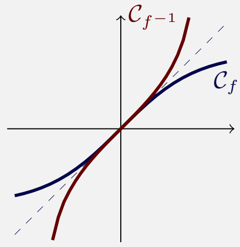


6. Comme on l'a vu, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs continue comme quotient de fonctions continues, donc le théorème de la bijection assure qu'elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R})$, qui est l'intervalle $]-1,1[$, d'après ce qui précède.
7. Si $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f(x) = y \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = y\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \iff (1-y)\,\mathrm{e}^x = (1+y)\,\mathrm{e}^{-x} \iff \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$
car $y \neq 1$. Ainsi, en composant par ln qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on obtient que
$$f(x) = y \iff 2x = \ln\frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$
Il y a donc une unique solution à l'équation, donnée par $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$.

8. Soit $y \in]-1,1[$. D'après ce qui précède, on a
$$y = f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\right), \quad \text{donc} \quad f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},$$
donc on a bien $f^{-1} = g$.

N.B. On pouvait aussi bien sûr redémontrer que $f(g(y)) = y$ pour tout $y \in]-1,1[$.

9. On sait que la courbe de f^{-1} est la courbe symétrique à $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. On obtient le graphe suivant.



Exercice 4 – Une suite homographique

On considère, lorsqu'elle est bien définie, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{6+u_n}{2+u_n}.$$
On supposera dans tout l'exercice que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.

1. *a.* Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ l'équation
$$\frac{6+x}{2+x} = x.$$
   b. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -3, ou la suite constante égale à 2.
2. Montrer que si $u_0 \neq 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $u_0 \neq 2$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n+3}{u_n-2}.$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de u_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de u_n.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

1. *a.* L'équation a pour domaine de validité $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Si $x \in D$, on a
$$\frac{6+x}{2+x} = x \quad\Leftrightarrow\quad 6+x = x(2+x) \quad\Leftrightarrow\quad x^2+x-6 = 0.$$
Or le polynôme x^2+x-6 a pour racines 2 et -3, qui appartiennent bien à D. L'équation a donc pour solutions 2 et -3.

   b. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite est constante, on a $u_{n+1} = u_n$. Autrement dit, on a
$$u_n = \frac{6+u_n}{2+u_n}.$$

Par conséquent, u_n est solution de l'équation de la question précédente. Nous savons donc que soit $u_n = 2$, soit $u_n = -3$.

Comme la suite est constante, tous ses termes sont égaux. D'après ce qui précède, soit ils sont tous égaux à 2, soit ils sont tous égaux à -3, ce qui conclut.

2. Nous allons raisonner par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \neq 2$".
   - *Initialisation.* Comme on a supposé $u_0 \neq 2$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathcal{P}(n+1)$ est fausse, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2$. On a alors

$$\frac{6+u_n}{2+u_n} = 2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 6+u_n = 2(2+u_n), \quad \text{donc} \quad u_n = 2.$$

   Il y a contradiction avec $\mathcal{P}(n)$, donc on a bien montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+3}{u_{n+1}-2} = \frac{\frac{6+u_n}{2+u_n}+3}{\frac{6+u_n}{2+u_n}-2} = \frac{6+u_n+3(2+u_n)}{6+u_n-2(2+u_n)} = \frac{4u_n+12}{-u_n+2} = -4\,\frac{u_n+3}{u_n-2} = -4v_n.$$

   On a finalement bien montée que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n = (-4)^n v_0 = (-4)^n\,\frac{u_0+3}{u_0-2}.$$

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n(u_n-2) = u_n+3$, on déduit que $u_n(v_n-1) = 2v_n+3$. On remarque que $v_n - 1 \neq 0$: sinon on aurait $u_n + 3 = u_n - 2$, ce qui est impossible. Finalement,

$$u_n = \frac{2v_n+3}{v_n-1} = \frac{2(-4)^n\,\frac{u_0+3}{u_0-2}+3}{(-4)^n\,\frac{u_0+3}{u_0-2}-1} = \frac{2(-4)^n\,(u_0+3)+3(u_0-2)}{(-4)^n\,(u_0+3)-(u_0-2)}.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en divisant le numérateur et le dénominateur par $(-4)^n$ dans la fraction précédente que

$$u_n = \frac{2(u_0+3)+\frac{3}{(-4)^n}\,(u_0-2)}{u_0+3-\frac{1}{(-4)^n}\,(u_0-2)}.$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} |(-4)^n| = +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{(-4)^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(-4)^n} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2(u_0+3)}{u_0+3} = 2.$$

Exercice 5 – Une inégalité

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
2. En déduire que si $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$, alors

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4.$$

3. Dans cette question, nous allons généraliser le résultat de la dernière question. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$, alors

$$(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

   On pourra procéder par récurrence sur n.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a
$$x + \frac{1}{x} - 2 \;=\; \frac{x^2+1-2x}{x} \;=\; \frac{(x-1)^2}{x} \;\geqslant\; 0.$$
On pouvait aussi étudier la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, et en déduire que f admet 2 pour minimum global sur $\mathbb{R}_+^\star$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$, on a
$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \;=\; 1 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 1 \;=\; 2 + f\left(\frac{a}{b}\right),$$
où f est la fonction introduite à la question précédente. D'après 1., on a alors $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathcal{P}(n)$: "si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \;\geqslant\; n^2$".

   Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
   - *Initialisation.* Si $a_1 \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $a_1 \frac{1}{a_1} = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soient $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+^\star$.

     En développant $(a_1 + \ldots + a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$, on peut le récrire
     $$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + a_{n+1}\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) + (a_1 + \ldots + a_n)\frac{1}{a_{n+1}} + 1$$
     Ainsi,
     $$\begin{aligned}(a_1 + \ldots + a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \;&\geqslant\; n^2 + \frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{n+1}} + \ldots \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 \\ &=\; n^2 + f\left(\frac{a_1}{a_{n+1}}\right) + \ldots + f\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) + 1 \\ &\geqslant\; n^2 + 2n + 1 \;=\; (n+1)^2.\end{aligned}$$
     D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, ce qui conclut.

   On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.