DS 2

28.09.2024 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Cours

1. Donner la définition de la fonction valeur absolue, et rappeler les deux inégalités triangulaires du cours.

2. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.

   a. Traduire "f est croissante" par une proposition avec des quantificateurs.

   b. Écrire la négation de la proposition $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$.

   c. Écrire la négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

3. Écrire la contraposée de l'implication (n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair).

4. Soient $g : x \mapsto \sqrt{x-1}$ et $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$. Expliciter les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ et préciser pour chacune d'elles le domaine de définition.

5. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier rigoureusement.

   a. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{9x^2+6x+1} = 3x+1$.

   b. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ ax^2 + bx = 0$.

   c. Si une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, n'est pas paire, alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$.

Exercice 1 – Équations et inéquations

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *a.* Résoudre l'équation suivante, d'inconnue réelle y :

$$y^2 - 3y - 4 \ \geqslant\ 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'inéquation suivante, d'inconnue réelle x :

$$\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \ \geqslant\ 3.$$

2. Résoudre l'équation suivante :

$$x - 2 \ =\ \sqrt{2x-1}.$$

   On pourra procéder par analyse-synthèse.

Exercice 2 – Raisonnements

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$1 \times 2 \ + \ \ldots \ + \ (n-1) \times n \ = \ \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels dans $[0,1]$ tels que $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1$. On veut montrer la proposition suivante :
$$\mathcal{P} \ : \ \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \ x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{1}{n}.$$
   a. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.

   b. Calculer la somme $(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_{n-1})$.

   c. À l'aide des questions précédentes, montrer par l'absurde que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

Dans cet exercice, nous nous proposons d'étudier la fonction
$$f \ : \ x \ \mapsto \ \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, et en déduire sa limite lorsque x tend vers $-\infty$.
5. Calculer $f'(0)$ et tracer l'allure de la courbe de f.
6. Justifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
7. On fixe $y \in]-1,1[$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x dans $\mathbb{R}$.
8. Justifier que $g : y \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$, définie sur $]-1,1[$, est la réciproque de la fonction f.
9. Tracer l'allure de la courbe de g sur le même graphique que celui de la question 5.

Exercice 4 – Une suite homographique

On considère, lorsqu'elle est bien définie, la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \ = \ \frac{6 + u_n}{2 + u_n}.$$

On supposera dans tout l'exercice que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -2$.

1. *a.* Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ l'équation
$$\frac{6+x}{2+x} \ = \ x.$$
   b. En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -3, ou la suite constante égale à 2.

2. Montrer que si $u_0 \neq 2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$.

Dans toute la suite, on suppose que $u_0 \neq 2$, et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n \ = \ \frac{u_n+3}{u_n-2}.$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4.

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de u_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis celle de u_n.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 5 – Une inégalité

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ x + \dfrac{1}{x} \ \geqslant \ 2$.

2. En déduire que si $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$, alors
$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ \geqslant 4.$$

3. Dans cette question, nous allons généraliser le résultat de la dernière question. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^\star$, alors
$$(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ \geqslant \ n^2.$$
   On pourra procéder par récurrence sur n.
