Concours Blanc 1 – DS 3

05.11.2024 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Un calcul de somme

1. On considère des réels a, b et la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \ = \ (ak+b)\,2^k.$$
Déterminer des valeurs de a et b pour avoir :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} - u_k \ = \ (k+2)\,2^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,2^k$ en fonction de n.

3. Recopier et compléter le script Python suivant pour afficher la somme ci-dessus calculée à l'aide d'une boucle `for` dans le cas où $n = 100$.

```
S=0
n=100
for ...:
    S=...
print(...)
```

Exercice 2 – Étude de fonction

On se propose d'étudier sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction
$$f \ : \ x \ \mapsto \ x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)$$

1. On introduit la fonction
$$g \ : \ u \ \mapsto \ \frac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}.$$
   a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et justifier que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g'(u) = 1 - g(u)^2$.

   b. En déduire que pour tout $u \geqslant 0$, on a $g(u) - u \leqslant 0$.

2. Étudier la parité de la fonction f.

3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,
$$f'(x) \text{ est du même signe que } g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^\star$.

4. Préciser les limites $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^u}{u}$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^-} f(x)$.

5. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
   Dresser le tableau de variations de f, et tracer l'allure de sa courbe représentative.
6. Soit $y \in]2, +\infty[$. Combien de solutions l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet-elle ?

Exercice 3 – Une classe de matrices

Pour tout réel t, on pose

$$A(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut $A(0)$?
2. Soient $s, t \in \mathbb{R}$. Calculer $A(t)A(s)$, et montrer qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ qu'on exprimera en fonction de s et t tel que
$$A(t)A(s) \;=\; A(u). \tag{1}$$
3. On note $B = A\left(\frac{1}{2}\right)$. Écrire la matrice B et déterminer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que
$$B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   En déduire que B n'est pas inversible.
4. À l'aide de la question 1 et de la relation (1), montrer que si $t \neq \frac{1}{2}$, alors $A(t)$ est inversible.

Exercice 4 – Approximation de π

Partie I – Un encadrement de π

On considère l'intervalle $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et on note, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \;=\; \frac{1}{3}\left(2\sin(x) + \tan(x)\right), \qquad \text{et} \qquad g(x) \;=\; \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

1. *a.* On considère le polynôme $P(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1$. Justifier l'existence de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que
$$P(y) \;=\; (y-1)(ay^2 + by + c),$$
   et déterminer les réels a, b, c qui conviennent.

   b. Déterminer les racines de P, et en déduire une factorisation de P. Justifier que pour tout $y \in]0, 1[$, $P(y) > 0$.
2. On introduit la fonction
$$u \;:\; x \mapsto f(x) - x.$$
   a. Justifier que u est dérivable sur I et montrer que pour tout $x \in I$,
$$u'(x) \;=\; \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$
   b. En déduire les variations de u sur I.

3. On introduit la fonction
$$v \ : \ x \mapsto x - g(x).$$
   a. Justifier que pour tout $x \in I$,
$$v'(x) \ = \ \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2},$$
   où Q est le polynôme donné par $Q(y) = y^2 - 2y + 1$.

   b. Déterminer le signe de $Q(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$. En déduire les variations de v sur I.
4. Déduire des questions précédentes que :
$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).$$

Partie II – Deux suites approchant π

On pose pour tout entier naturel n,
$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{ et } \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

5. Justifier que pour tout réel θ,
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta),$$
   et en déduire que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}} \quad (\star) \quad \text{ et } \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}} \quad (\star\star)$$
6. À l'aide de la question 4, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \ < \ \pi \ < \ 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$
7. En admettant la limite :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \ = \ 1,$$
   justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers l'infini.
8. Recopier et compléter le script Python suivant afin qu'il affiche, à l'aide des relations $(\star)$ et $(\star\star)$ et de la question 6, une approximation de π à 10^{-5} près.

```python
import numpy as np
k=0
a=np.sqrt(3)/2
b=1/2
while ...:
    a=...
    b=...
    k=...
print("Approximation de pi : ",...)
```

Exercice 5 – Puissances d'une matrice

On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans cet exercice, on propose deux méthodes de calcul des puissances successives de M. Les deux parties sont indépendantes.

Partie I - Utilisation d'une relation polynomiale

1. Calculer M^2 et M^3, et vérifier que $-M^3 + 3M^2 - 2M = 0_3$, où 0_3 désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer $-M^2 + 3M - 2I_3$, et déduire que M n'est pas inversible.

On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par : $x_1 = 0$, $y_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n \end{cases}$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$M^n = x_n M^2 + y_n M.$$
4. *a.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer x_{n+2} en fonction de x_{n+1} et x_n.
   b. Montrer par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_n = 2^{n-1} - 1$.
   c. Déduire de la question précédente l'expression de y_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
5. Déduire de la question 3 l'expression de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie II - Diagonalisation

6. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
7. Calculer explicitement la matrice $D = P^{-1}MP$.
8. Exprimer D^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.
9. Montrer que $M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

⋆ ⋆
⋆