DS 4

Corrigé

Cours

1. Soient k, n deux entiers tels que $k \leqslant n$. Donner l'expression de $\binom{n}{k}$, et montrer par un calcul sur les coefficients la formule du capitaine.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   a. À quelle condition sur les réels a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ?
   b. Donner l'expression de A^{-1} lorsqu'elle existe.
3. Soient E et F deux ensembles. Donner la définition d'une fonction bijective de E dans F.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$
   Déterminer explicitement u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

1. On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$
   Montrons la formule du capitaine :
$$k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1},$$
   car $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$.
2. *a.* La matrice est A est inversible si et seulement si $\det A = ad - bc$ est non nul.
   b. Dans le cas où A est inversible, on a $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
3. Une fonction $f : E \to F$ est bijective de E dans F si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On a :
$$\ell = 2\ell - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ell = 1$$
   On sait alors que $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. Ceci entraîne alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - 1 = (u_0 - 1)2^n, \quad i.e.\ u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Exercice 1 – Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2. *a.* Étudier la fonction $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   b. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_0 = \cos(\theta)$.

3. *a.* Pour deux réels quelconques a, b, rappeler la formule qui donne $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. En déduire la formule qui donne $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

4. Déduire de la question précédente que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

5. On suppose que $u_0 = 0$. Recopier et compléter le script Python suivant pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $1 - u_n \leqslant 10^{-5}$.

```
import numpy as np
U=0
n=0
eps=10**(-5)
while .....
    U=.....
    n=.....
print("Entier n :",...)
```

1. Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$" est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - *Initialisation.* On a $u_0 \in [0,1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vérifiée.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est.
     - ⋄ On a $u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}}$ est bien défini, et positif.
     - ⋄ On a $u_n \leqslant 1$, donc $\frac{u_n+1}{2} \leqslant 1$, puis $\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \leqslant 1$, car $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

     Ceci montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

   Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. *a.* La fonction cos est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et sa dérivée est $-\sin$. Comme sin est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   b. La fonction cos est continue, et on a $\cos 0 = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Comme cos est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle définit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur son ensemble image $[0,1]$. Comme $u_0 \in [0,1]$, il existe donc un unique $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\theta = u_0$.

3. *a.* On a $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, donc
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1.$$

   b. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$".
   - *Initialisation.* D'après la question 2.b., la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En appliquant la formule de la question précédente avec $a = \frac{\theta}{2^{n+1}}$, on obtient $\cos \frac{\theta}{2^n} = 2\cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}} - 1$, donc
$$\cos^2 \frac{\theta}{2^{n+1}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2^n} + 1}{2} = u_{n+1}^2,$$
     d'après l'hypothèse de récurrence. En prenant la racine de chacun des membres, on obtient que $|u_{n+1}| = \left|\cos \frac{\theta}{2^{n+1}}\right|$.
     Comme $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \geqslant 0$. On sait par ailleurs que $u_{n+1} \geqslant 0$. Par conséquent, on a $u_{n+1} = \cos \frac{\theta}{2^{n+1}}$.

   On a donc bien montré par récurrence que $u_n = \cos \frac{\theta}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On a $\frac{\theta}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par continuité de la fonction cos.

5.
```python
import numpy as np
U=0
n=0
eps=10**(-5)
while (1-U)>eps:
    U=np.sqrt((U+1)/2)
    n+=1
print("Entier n :",n)
```

Exercice 2 – Calcul des puissances d'une matrice

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer les puissances de M de deux manières différentes.

Calcul à l'aide de deux suites

On introduit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3b_n, \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n, et en déduire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2.
3. Calculer b_1, et déterminer l'expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir de la question précédente. En déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul à l'aide de la formule du binôme de Newton

Nous proposons maintenant une nouvelle manière de calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer J^2.
5. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star, \; J^k = 4^{k-1} J.$$

L'égalité est-elle vraie lorsque $k = 0$?

6. Exprimer M en fonction de J et de la matrice identité I_4 de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
7. En déduire l'expression de M^n pour un entier $n \in \mathbb{N}$, et vérifier que le calcul correspond à celui de la question 3.

1. Montrons par récurrence que la propriété
$$\mathcal{P}(n)\ :\ M^n\ =\ \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - *Initialisation.* On a $M^0 = I_4$. Comme $a_0 = 1$ et $b = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors
$$M^{n+1}\ =\ MM^n\ =\ \begin{pmatrix} 3b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & 3b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & a_n+2b_n & 3b_n & a_n+2b_n \\ a_n+2b_n & a_n+2b_n & a_n+2b_n & 3b_n \end{pmatrix},$$
par calcul de produit matriciel. Comme $a_{n+1} = 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$, ceci entraîne bien que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc bien démontré le résultat par récurrence.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$b_{n+2}\ =\ a_{n+1} + 2b_{n+1}\ =\ 2b_{n+1} + 3b_n.$$
Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit bien une récurrence linéaire d'ordre 2.
3. On a $b_1 = a_0 + 2b_0 = 1$. On écrit l'équation caractéristique associée à la récurrence ci-dessus :
$$r^2\ =\ 2r+3\quad\Leftrightarrow\quad r^2 - 2r - 3 = 0.$$
Les solutions de cette équation sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$. On sait alors qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n\ =\ \lambda(-1)^n + \mu 3^n.$$
Comme $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$, on obtient le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda + 3\mu = 1 \end{cases}$ qui donne $\mu = -\lambda = \frac{1}{4}$.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$b_n\ =\ \frac{1}{4}\big(3^n - (-1)^n\big),\quad \text{et donc si } n > 0,\quad a_n\ =\ 3b_{n-1}\ =\ \frac{1}{4}\big(3^n + 3\,(-1)^n\big).$$
Cette dernière relation est d'ailleurs encore valable pour $n = 0$.
4. On trouve $J^2 = 4J$.
5. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k) : J^k = 4^{k-1}J$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.
   - *Initialisation.* On a $4^{1-1}J = J$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. On a alors
$$J^{k+1}\ =\ J\,J^k\ =\ J\,4^{k-1}J\ =\ 4^{k-1}J^2\ =\ 4^kJ$$
car $J^2 = 4J$. Ainsi, on a montré que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   On a donc bien montré par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $J^k = 4^{k-1}J$. On remarque par ailleurs que le résultat est faux pour $k = 0$.
6. On a $M = J - I_4$.
7. Comme les matrices J et $-I_4$ commutent (I_4 commute avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$), on peut utiliser la formule du binôme de Newton :
$$M^n\ =\ (J - I_4)^n\ =\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k(-I_4)^{n-k}\ =\ \binom{n}{0}J^0(-I_4)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}J^k(-I_4)^{n-k}.$$
En utilisant $(-I_4)^{n-k} = (-1)^{n-k}I_4 = (-1)^n\,(-1)^kI_4$ et la question précédente, on obtient alors
$$M^n\ =\ (-1)^nI_4 + (-1)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^{k-1}\,(-1)^kJ.$$

En observant que $4^{k-1} = \frac{1}{4}4^k$, puis $4^k(-1)^k = (-4)^k$, on a donc

$$M^n = (-1)^n I_4 + \frac{(-1)^n}{4}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k J.$$

Par ailleurs, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-4)^k - 1 = (-3)^n - 1$, ce qui donne :

$$M^n = (-1)^n I_4 + \frac{(-1)^n}{4}\left((-3)^n - 1\right) J = (-1)^n I_4 + \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)\, J.$$

Ainsi, on obtient bien le même résultat qu'en question 3.

Exercice 3 – Une suite homographique

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-2}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. *a.* Montrer que l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   b. Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{4\}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

   c. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$, et préciser sa bijection réciproque.

2. On considère maintenant la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}. \end{cases}$$

   On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n$ est bien défini et $u_n > 2$.

   a. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

   Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer qu'elle est géométrique.

   b. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de v_n, puis de u_n.

   c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

3. Compléter le script Python suivant pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $|u_n - 2| \leqslant 10^{-5}$.

```python
def f(x):
    return (4*x-2)/(x+1)

u=4
n=0
while ...:
    u=...
    n=...
print(n)
```

1. *a.* Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors on a
$$f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{x+1} = 4 \Leftrightarrow 4x - 2 = 4(x+1) \Leftrightarrow -2 = 4,$$
donc on ne peut pas avoir $f(x) = 4$. Il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ à l'équation $f(x) = 4$.

   b. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{4x-2}{x+1} \Leftrightarrow 4x - 2 = y(x+1) \Leftrightarrow x(4-y) = y+2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{4-y},$$
Ainsi, l'équation $y = f(x)$ a une unique solution, donnée par $x = \frac{y+2}{4-y}$.

   c. On déduit de la question précédente que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, et sa bijection réciproque est donnée par
$$f^{-1} : y \mapsto \frac{y+2}{4-y}.$$

2. *a.* Comme $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n - 1 \neq 0$, et la suite (v_n) est bien définie. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 1} = \frac{4u_n - 2 - 2(u_n+1)}{4u_n - 2 - (u_n+1)} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2(u_n-2)}{3(u_n-1)} = \frac{2}{3}v_n.$$
Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

   b. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Par conséquent, comme
$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1} \Leftrightarrow (u_n-1)v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n(v_n-1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1},$$
ce qui est valide car pour tout n, $v_n < 1$ donc $v_n - 1 \neq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{(2/3)^{n+1} - 2}{(2/3)^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}}{2^{n+1} - 3^{n+1}}.$$

   c. Comme on sait que $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a, par somme et quotient de limites, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

3.
```
u=4
n=0
while abs(u-2)>10**(-5):
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 4 – Une suite définie implicitement

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, f_n définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-2, 1[$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x, admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Dans la suite, on notera cette solution u_n.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(u_n) = 0$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier que $f_n(u_n) > f_n(n)$, et en déduire que $u_n > n$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$?

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, en utilisant l'égalité

$$f_n(u_n) \;=\; \frac{u_n - n}{u_n + n} - \mathrm{e}^{-u_n} \;=\; 0,$$

montrer que $f_{n+1}(u_n) < 0$. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

1. La fonction f_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car $x+n>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et est dérivable comme somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + \mathrm{e}^{-x}$.
2. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) > 0$, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a $f_n(0) = -2$. D'autre part, on a

$$\frac{x-n}{x+n} = \frac{1-\frac{n}{x}}{1+\frac{n}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{donc} \quad f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Ainsi, comme f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de la bijection entraîne que fe st bijective de $\mathbb{R}_+$ sur son ensemble image. D'après ce qui précède, et comme $f_n(0) = -2$, on a le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
f_n	-2 $\nearrow$	1

   Finalement, f_n est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[-2, 1[$.
3. Comme 0 appartient à l'ensemble image de f_n, on sait que 0 a un unique antécédent $x \in \mathbb{R}_+$ par f_n, donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+$.
4. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $f_n(n) = -\mathrm{e}^{-n} < 0$. Comme par définition $f_n(u_n) = 0$, on a $f_n(n) < f_n(u_n)$. Par stricte croissance de f_n, on a donc $n < u_n$.

   Comme $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, on obtient par comparaison que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
5. On a

$$f_{n+1}(u_n) \;=\; \frac{u_n - (n+1)}{u_n + n + 1} - \mathrm{e}^{u_n} \;=\; \frac{u_n - (n+1)}{u_n + n + 1} - \frac{u_n - n}{u_n + n}, \tag{1}$$

   car $f_n(u_n) = 0$. Or on a

$$u_n - (n+1) < u_n - n \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_n + n + 1} < \frac{1}{u_n + n}.$$

   Si $u_n - (n+1) \geqslant 0$, alors en multipliant ces deux inégalités dont tous les termes sont positifs, on obtient

$$\frac{u_n - (n+1)}{u_n + n + 1} < \frac{u_n - n}{u_n + n}, \quad \text{donc} \quad f_{n+1}(u_n) < 0.$$

   Si $u_n - (n+1) < 0$, alors comme $u_n - n > 0$ d'après la question précédente, on obtient directement à partir de (1) que $f_{n+1}(u_n) < 0$.

   On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$. Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient alors que $u_n < u_{n+1}$. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante.