DS 4

30.11.2024 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

* * *

Cours

1. Soient k, n deux entiers tels que $k \leq n$. Donner l'expression de $\binom{n}{k}$, et montrer par un calcul sur les coefficients la formule du capitaine.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - a. À quelle condition sur les réels a, b, c, d la matrice A est-elle inversible ?
 - b. Donner l'expression de A^{-1} lorsqu'elle existe.
3. Soient E et F deux ensembles. Donner la définition d'une fonction bijective de E dans F .
4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

Déterminer explicitement u_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 – Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in [0, 1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
2.
 - a. Étudier la fonction $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
 - b. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $u_0 = \cos(\theta)$.
3.
 - a. Pour deux réels quelconques a, b , rappeler la formule qui donne $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$, $\sin b$. En déduire la formule qui donne $\cos(2a)$ en fonction de $\cos a$.
 - b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.
4. Déduire de la question précédente que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
5. On suppose que $u_0 = 0$. Recopier et compléter le script Python suivant pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $1 - u_n \leq 10^{-5}$.

```

import numpy as np
U=0
n=0
eps=10**(-5)
while .....
    U=.....
    n=.....
print("Entier n :",...)

```

Exercice 2 – Calcul des puissances d’une matrice

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer les puissances de M de deux manières différentes.

Calcul à l’aide de deux suites

On introduit les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3b_n, \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n , et en déduire que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une récurrence linéaire d’ordre 2.
3. Calculer b_1 , et déterminer l’expression de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ à partir de la question précédente. En déduire l’expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calcul à l’aide de la formule du binôme de Newton

Nous proposons maintenant une nouvelle manière de calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer J^2 .
5. Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, J^k = 4^{k-1}J.$$

L’égalité est-elle vraie lorsque $k = 0$?

6. Exprimer M en fonction de J et de la matrice identité I_4 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
7. En déduire l’expression de M^n pour un entier $n \in \mathbb{N}$, et vérifier que le calcul correspond à celui de la question 3.

Exercice 3 – Une suite homographique

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-2}{x+1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - b. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - c. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, et préciser sa bijection réciproque.
2. On considère maintenant la suite définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}. \end{cases}$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 2$.

- a. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et montrer qu'elle est géométrique.

- b. En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de v_n , puis de u_n .
- c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

3. Compléter le script PYTHON suivant pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $|u_n - 2| \leq 10^{-5}$.

```
def f(x):
    return (4*x-2)/(x+1)

u=4
n=0
while ...:
    u=...
    n=...
print(n)
```

Exercice 4 – Une suite définie implicitement

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable, et calculer sa dérivée.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-2, 1[$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$, d'inconnue x , admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. Dans la suite, on notera cette solution u_n .

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que $f_n(u_n) > f_n(n)$, et en déduire que $u_n > n$. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'égalité

$$f_n(u_n) = \frac{u_n - n}{u_n + n} - e^{-u_n} = 0,$$

montrer que $f_{n+1}(u_n) < 0$. En déduire les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

* *

* *