DS 5

Corrigé

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right. \qquad (S)$$

3. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} u_0=2,\ u_1=6, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=6u_{n+1}-8u_n \end{array}\right.$$

Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2n+1-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Par conséquent, comme $\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. On a

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +y & +2z & = & 3 & \\ & y & -z & = & -2 & {\scriptstyle L_2\leftarrow L_2-L_1} \\ & -y & -3z & = & -6 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3-2L_1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +y & +2z & = & 3 & \\ & y & -z & = & -2 & \\ & & -4z & = & -8 & {\scriptstyle L_3\leftarrow L_3+L_1} \end{array}\right.$$

On en déduit que le système a une unique solution, donnée par le triplet $(-1,0,2)$.

3. La suite $(u_n)_n$ vérifie est récurrente linéaire d'ordre 2, à coefficients constants. On commence alors par résoudre l'équation caractéristique associée :

$$r^2-6r+8=0$$

qui a deux solutions : $r_1=2$ et $r_2=4$. Ainsi, le terme général de la suite est de la forme $u_n=\lambda 2^n+\mu 2^n$, où $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Comme $u_0=2$ et $u_1=6$, on a alors

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda+\mu=2 \\ 2\lambda+4\mu=6 \end{array}\right. \quad i.e. \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda=1 \\ \mu=1 \end{array}\right.$$

Finalement, on a montré que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=2^n+4^n$.

Exercice 2 – Étude d'une suite récurrente (d'après EMLyon E 2009)

On note $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x\in\mathbb{R}$, par :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0, \\ 1 & \text{si } x=0. \end{array}\right.$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. *a.* Montrer que f est continue en 0.

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et donner l'expression de f' sur $\mathbb{R}^\star$.

2. *a.* Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction
$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) < 0$.

   c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f.

3. Montrer que f admet un unique point fixe α (c'est-à-dire que $f(\alpha) = \alpha$), que l'on calculera.

4. *a.* Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.
   On pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1$ sur $[0, +\infty[$.

   b. Exprimer $f'(x) + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. À l'aide de la question précédente, en déduire que
$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$$

   c. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\quad |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - \alpha|$.

   On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis : si g est dérivable sur un intervalle I et $|g'(x)| \leqslant K$ pour tout $x \in I$, alors pour tous $a, b \in I$,
$$|g(b) - g(a)| \;\leqslant\; K\,|b - a|.$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|\,.$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2^n}\,|1 - \alpha|,$$
   et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

7. Compléter la fonction Python `f(x)` ci-dessous qui prend en entrée un réel x et renvoie $f(x)$, puis compléter le script qui suit pour afficher le plus petit entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-8}$.

```
import numpy as np
def f(x):
    if ...:
        return ...
    else:
        return ...
```

```
u=0
n=0
while ...
    u=...
    n=...
print(...)
```

1. *a.* On sait que $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc la fonction f est continue en 0.

   Rappel : il s'agit d'une limite usuelle du cours, qu'on peut retrouver en utilisant la dérivabilité en 0 *de la fonction* exp *:* $\frac{e^x - e^0}{x-0} = \frac{e^x-1}{x} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \exp'(0) = e^0 = 1$.

   b. La fonction f est de classe dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur ces intervalles, dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, si $x \in \mathbb{R}^\star$, alors

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - x\,e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{(1-x)\,e^x - 1}{(e^x-1)^2}.$$

2. *a.* La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u'(x) \;=\; -e^x + (1-x)\,e^x \;=\; -x\,e^x.$$

   Comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que $u'(x)$ est du signe de $-x$, ce qui donne finalement que $u'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^\star$, et $u'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Finalement, la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

   Par conséquent, la fonction u est maximale en 0 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leqslant u(0) = 0$. On a même $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^\star$ par stricte croissance sur $\mathbb{R}_-$ et stricte décroissance sur $\mathbb{R}_+$

   b. On constate que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. Comme on a vu à la question précédente que u est strictement négative sur $\mathbb{R}^\star$, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.

   c. Calcul des limites :

   – On a
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x(1 - \frac{1}{e^x})} = \frac{x}{e^x}\frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}}.$$
   Comme $\dfrac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, on a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

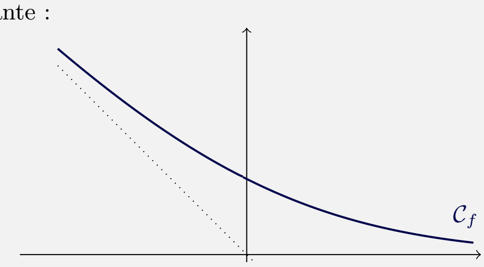
   – On a $e^x - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$, ce qui entraîne que $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Par ailleurs, comme $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on sait que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

   d. On a
$$f(x) + x \;=\; \frac{x}{e^x - 1} + x \;=\; \frac{x + x\,e^x - x}{e^x - 1} \;=\; \frac{x\,e^x}{e^x - 1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Comme $f(x) - (-x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on sait que la droite d'équation $x \mapsto -x$ est asymptote oblique à la courbe de f en $-\infty$.

   e. On obtient l'allure suivante :



3. Comme $f(0) \neq 0$, on a

$$f(x) = x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{e^x - 1} = x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{e^x - 1} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x - 1 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^x = 2 \quad\Leftrightarrow\quad x = \ln 2.$$

4. *a.* On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de telles fonctions. On a par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$g'(x) \;=\; 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 2x\mathrm{e}^{x} \;=\; 2\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - x - 1).$$

On a par ailleurs $\mathrm{e}^{x} - x - 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On peut voir ceci en dérivant la fonction

$$h : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - x - 1$$

En effet, on a $h'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $h(x) \geqslant h(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
On pouvait aussi montrer ce dernier point en utilisant l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$ sur l'intervalle $[0, x]$.

Ainsi, on a montré que $g'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que $g(x) \geqslant g(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} \;=\; \frac{(1-x)\mathrm{e}^{x} - 1}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2} + \frac{1}{2} \;&=\; \frac{2(1-x)\mathrm{e}^{x} - 2 + (\mathrm{e}^{x}-1)^2}{2(\mathrm{e}^{x}-1)^2} \\ &=\; \frac{2\mathrm{e}^{x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 2 + \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1}{2(\mathrm{e}^{x}-1)^2} \\ &=\; \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1}{2(\mathrm{e}^{x}-1)^2}, \end{aligned}$$

donc $f'(x) + \frac{1}{2}$ est du signe de $\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} - 1$. D'après la question précédente, on a alors $f'(x) + \frac{1}{2} \geqslant 0$. Par ailleurs, on a vu à la question 2.*b.* que $f'(x) < 0$, ce qui donne finalement que $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

c. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, et d'après la question précédente, $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, comme $\alpha \in]0, +\infty[$, on a pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$|f(x) - \alpha| \;=\; |f(x) - f(\alpha)| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|x - \alpha|.$$

5. Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]0, +\infty[$, de sorte qu'on peut appliquer la question précédente. Nous montrons ce point par une rapide récurrence :

   – $u_0 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$,
   – soit $n \in \mathbb{N}$, si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > 0$ car f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

   On a donc bien $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la question précédente donne alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \;=\; |f(u_n) - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|.$$

6. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   – Comme $u_0 = 1$, on a $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
   – Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, on a alors d'après la question précédente

$$|u_{n+1} - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \;\leqslant\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\,|1 - \alpha| \;=\; \frac{1}{2^{n+1}}\,|1 - \alpha|.$$

   Ceci clôt la récurrence, on a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|1 - \alpha|$.

7.
```python
import numpy as np
def f(x):
    if x==0:
        return 1
    else:
        return x/(np.exp(x)-1)
```

```python
u=0
n=0
while abs(u-np.log(2))>10**(-8):
    u=f(u)
    n=n+1
print(n)
```

Exercice 3 – Premier succès avec un nombre fini d'essais

La connexion à un serveur a une probabilité $p \in]0,1[$ de succès. On s'intéresse à une procédure qui consiste à faire au plus n tentatives indépendantes de connexion, où n est un entier supérieur ou égal à 2, et s'arrêter en cas de succès. En d'autres termes, on s'arrête dans l'une des deux situations suivantes :

- soit la connexion a été réussie,
- soit la connexion a échoué n fois.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.
On note T_n la variable aléatoire correspondant au nombre de tentatives effectuées.

1. Justifier que l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre T_n est $[\![1, n]\!]$.
2. En introduisant les événements C_i : "la connexion réussit à la $i^{\text{ème}}$ tentative", pour $i \in [\![1, n]\!]$, Montrer que si $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\mathbb{P}(T_n = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p.$$
3. Toujours en ayant recours aux événements C_i, montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = (1-p)^{n-1}$.
4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) = 1$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,
$$\sum_{k=1}^{n-1} k\,x^{k-1} \;=\; \frac{(n-1)\,x^n - n\,x^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$
6. En déduire que $\mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1-(1-p)^n}{p}$.
7. Compléter la fonction Python `T(n)` suivante qui prend en entrée un entier n, et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

```python
import numpy.random as rd
def T(n):
    k=1
    while ...:
        k=...
    return ...
```

8. Qu'affiche le script Python suivant ?

```python
N=10000
S=0
for k in range(N):
    S=S+T(n)
print(S/N)
```

1. Le nombre de tentatives peut aller de 1 en cas de succès immédiat, à n. On a donc $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a $\mathbb{P}(T_n = 1) = \mathbb{P}(C_1) = p$. Si $k \in [\![2, n-1]\!]$, on s'arrête au bout de k tentatives à condition que la connexion ait échoué les $k-1$ premières fois, et réussi la $k^{\text{ème}}$. Ainsi, $\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(\overline{C}_1 \cap \ldots \cap \overline{C}_{k-1} \cap C_k)$. Par la formule des probabilités composées, on a alors
$$\mathbb{P}(T_n = k) \;=\; \mathbb{P}(\overline{C}_1)\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1}(\overline{C}_2)\,\ldots\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1\cap\ldots\cap\overline{C}_{k-1}}(C_k) \;=\; (1-p)^{k-1}p.$$
3. L'événement $[T_n = n]$ est réalisé ssi on a échoué les n fois, ou réussi à la dernière tentative. Ces événements étant incompatibles, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = n) &= \mathbb{P}(\overline{C}_1 \cap \ldots \cap \overline{C}_{n-1} \cap C_n) + \mathbb{P}(\overline{C}_1 \cap \ldots \cap \overline{C}_n)\\
&= \mathbb{P}(\overline{C}_1)\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1}(\overline{C}_2)\,\ldots\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1\cap\ldots\cap\overline{C}_{n-1}}(C_n) + \mathbb{P}(\overline{C}_1)\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1}(\overline{C}_2)\,\ldots\,\mathbb{P}_{\overline{C}_1\cap\ldots\cap\overline{C}_{n-1}}(\overline{C}_n)\\
&= (1-p)^{n-1}p + (1-p)^n\\
&= (1-p)^{n-1}(p + 1 - p) \;=\; (1-p)^{n-1},
\end{aligned}$$
en utilisant à nouveau la formule des probabilités composées.
4. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p + (1-p)^{n-1} &= p\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} + (1-p)^{n-1}\\
&\overset{l=k-1}{=} p\sum_{l=0}^{n-2}(1-p)^{l} + (1-p)^{n-1}\\
&= p\,\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} + (1-p)^{n-1} \;=\; 1,
\end{aligned}$$
car on a reconnu une somme géométrique.
5. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geqslant 2$.
   - *Initialisation.* On a $\sum_{k=1}^{1} kx^{k-1} = 1$, et $\frac{x^2-2x+1}{(1-x)^2} = 1$, donc le résultat est vrai pour $n = 2$.
   - *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}$. Alors
   $$\begin{aligned}
   \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} &= \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2} + nx^{n-1}\\
   &= \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1 + nx^{n-1} - 2nx^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}\\
   &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2},
   \end{aligned}$$
   donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

   On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}$.

   Remarque. On peut aussi montrer le résultat en considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$, dont la quantité étudiée est la dérivée : on a par ailleurs pour tout $x \in]0, 1[$,
   $$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1-x^n}{1-x}$$
   donc $f'(x) \;=\; \dfrac{-nx^{n-1}(1-x) + 1 - x^n}{(1-x)^2} \;=\; \dfrac{(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1}{(1-x)^2}$, d'où le résultat.

6. T_n est une v.a.r. finie, donc possède une espérance. On a par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(T_n = k) &= \sum_{k=1}^{n-1} k(1-p)^{k-1}p + n(1-p)^{n-1} \\ &= p\,\frac{(n-1)(1-p)^n - n(1-p)^{n-1} + 1}{(1-(1-p))^2} + n(1-p)^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)(1-p)^n - n(1-p)^{n-1} + 1 + np(1-p)^{n-1}}{p} \\ &= \frac{1-(1-p)^n}{p}.\end{aligned}$$

7.
```python
import numpy.random as rd
def T(n):
    k=1
    while rd.binomial(1,p)==0 & k<=n:
        k=k+1
    return k
```

8. Le script affiche la moyenne de 10 000 simulations de T_n effectuées en ayant recours à la fonction `T` de la question précédente. Ceci fournit une estimation de l'espérance de T_n.

Exercice 4 – Tirages successifs dans une urne (d'après Ecricome 2019)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ième tirage, et on pose $X_0 = 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on pourra noter B_k l'événement décrit par : "la boule tirée au k-ième tirage est blanche".

1. Préciser l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_1, et expliciter la loi de X_1. Donner son espérance.
2. En ayant recours aux événements B_k introduits ci-dessus, justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par : $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et
$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}.$$
3. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^\star$. Justifier qu'il y a exactement $k+2$ boules dans l'urne après le k-ième tirage, et que l'ensemble des valeurs que peut prendre X_k est $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.
4. Soit $i \in X_{k+1}(\Omega)$.
   a. Si l'événement $[X_k = i]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage, et en déduire $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i)$.
   Si l'événement $[X_k = i-1]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage, et en déduire $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i)$.
   b. Si $j \in X_k(\Omega)$ avec $j \neq i-1$ et $j \neq i$, que dire de $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i)$?

5. Déduire de ce qui précède que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $i \in X_{k+1}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i) \ = \ \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i) \ + \ \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k = i-1)\,. \qquad (\star)$$

6. *a.* Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

   b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_k = k+1)$.

   c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose
   $$a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}(X_k = 2)\,.$$
   En utilisant la formule $(\star)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ a_{k+1} = 2a_k + k + 1$.

   d. On introduit la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de terme général $b_k = a_k + k + 2$. Montrer que la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

   e. Exprimer le terme général b_k, puis le terme général a_k, et en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{P}(X_k = 2) \ = \ \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

7. *a.* À l'aide de la formule $(\star)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbb{E}(X_{k+1}) \ = \ \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{E}(X_k) + 1.$$

   b. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_k) \ = \ \dfrac{k+2}{2}$.

   c. En ayant recours à la variable aléatoire Y_k désignant le nombre de boules noires dans l'urne après k tirages, proposer une autre moyen de trouver le résultat de la question précédente.

Ecricome 2019 (début du Problème).

1. On a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Par ailleurs,
   $$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}\left(\overline{B}_1\right) = \frac{1}{2}.$$
   La variable aléatoire X_1 suit donc une loi uniforme sur $\{1, 2\}$, d'espérance $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$.
2. On a $[X_2 = 1] = B_1 \cap B_2$, donc :
   $$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
   Car quand une boule blanche est tirée au premier tirage, pour le second tirage, l'urne est composée d'une boule blanche et de deux boules noires. Donc $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$.
   De même, $[X_2 = 3] = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, donc
   $$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}_{\overline{B_1}}\left(\overline{B_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
   Comme $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, on en déduit que $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.
   Ainsi $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \frac{1}{6}$.
3. Une boule exactement est ajoutée à chaque tirage. Comme il y a deux boules dans l'urne au départ, l'urne compte $k+2$ boules après k tirages.

   Pour chacun des k premiers tirages, une boule blanche a pu être ajoutée ou non dans l'urne. Donc $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$. Le nombre de boules blanches ajoutées est donc entre 0 et k. Comme il y a une boule blanche au départ, le nombre total de boules blanches est entre 1 et $k+1$.
4. *a.* Soit $i \in X_{k+1}(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.

- Si $[X_k = i]$ est réalisé, il y a exactement i boules blanches dans l'urne après k tirages, et $k+2$ boules au total dans l'urne. $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans cette urne, donc $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{k+2}$.
- Si $[X_k = i-1]$ est réalisé, il y a exactement $i-1$ boules blanches dans l'urne après k tirages, et $k+2$ boules au total dans l'urne. $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i+1)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans cette urne, donc $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i+1) = \frac{k+2-(i-1)}{k+2} = \frac{3+k-i}{k+2}$.

b. Si $[X_k = j]$ est réalisé, on sait que le nombre de boules blanches après le $(k+1)$-ième tirage sera soit j, soit $j+1$. Par conséquent, si $i \neq j$ et $i \neq j+1$, l'événement $[X_{k+1} = i]$ ne peut se réaliser. On a donc $\mathbb{P}_{[X_k=j]}(X_{k+1} = i) = 0$.

5. La famille $([X_k = j])_{1\leqslant j\leqslant k+1}$ formant un système complet d'événements, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{k+1}=i) &= \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}_{X_k=j}(X_{k+1}=i)\,\mathbb{P}(X_k=j)\\ &= \mathbb{P}_{X_k=i-1}(X_{k+1}=i)\,\mathbb{P}(X_k=i-1)+\mathbb{P}_{X_k=i}(X_{k+1}=i)\,\mathbb{P}(X_k=i)\\ &= \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=i)+\frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=i-1).\end{aligned}$$

6. *a.* L'événement $[X_k = 1]$ correspond au cas où il n'y a qu'une boule blanche dans l'urne après k tirages. D'après l'expérience, cet événement est réalisé ssi chaque tirage a donné la boule blanche. On a alors par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}}(B_k).$$

Pour $i \in \mathbb{N}^\star$, la probabilité $\mathbb{P}_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne de $i+1$ boules dont 1 blanche, c'est-à-dire $\frac{1}{i+1}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\ldots\times\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

N.B. On peut aussi raisonner par récurrence, et utiliser la formule $(\star)$.

b. De manière analogue à la question précédente, on a $[X_k = k+1] = \bigcap_{i=1}^{k} \overline{B}_i$, donc d'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_k = k+1) = \mathbb{P}\left(\overline{B}_1\right)\mathbb{P}_{\overline{B}_1}\left(\overline{B}_2\right)\ldots\mathbb{P}_{\overline{B}_1\cap\ldots\cap\overline{B}_{k-1}}\left(\overline{B}_k\right) = \frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}.$$

N.B. On peut aussi remarquer que la situation est symétrique à la précédente.

c. D'après la question 5, on a

$$\begin{aligned}a_{k+1} = (k+2)!\,\mathbb{P}(X_{k+1}=2) &= (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=2)+\frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=1)\right)\\ &= 2(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k=2)+(k+1)(k+1)!\,\mathbb{P}(X_k=1)\\ &= 2a_k+k+1,\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{(k+1)!}$.

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_{k+1} = a_{k+1} + k + 3 = 2a_k + 2k + 4 = 2b_k$, donc la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison 2 .

e. On déduit de la question précédente que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $b_k = 2^k b_0 = 2^k(a_0 + 2) = 2^{k+1}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{a_k}{(k+1)!} = \frac{2^{k+1}-k-2}{(k+1)!}.$$

7. *a.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i\,\mathbb{P}(X_{k+1}=i)\\
&= \sum_{i=1}^{k+2} i\left(\frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=i)+\frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}(X_k=i-1)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k+2}\frac{i^2}{k+2}\mathbb{P}(X_k=i)+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{j+1}{k+2}(k+2-j)\mathbb{P}(X_k=j)\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{i^2}{k+2}+\frac{i+1}{k+2}(k+2-i)\right)\mathbb{P}(X_k=i)+(k+2)\mathbb{P}(X_k=k+2)+\mathbb{P}(X_k=0)\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{k+1}{k+2}i+1\right)\mathbb{P}(X_k=i) \;=\; \mathbb{E}\left(\frac{k+1}{k+2}\,X_k+1\right) \;=\; \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{E}(X_k)+1.
\end{aligned}$$

b. On raisonne par récurrence : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_k$: "$\mathbb{E}(X_k)=\frac{k+2}{2}$".

- On a $\mathbb{E}(X_0)=1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, on a alors $\mathbb{E}(X_{k+1})=\frac{k+1}{k+2}\cdot\frac{k+2}{2}+1=\frac{k+1}{2}+1=\frac{k+3}{2}$. Par conséquent, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On a donc montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_k)=\frac{k+2}{2}$.

c. Par symétrie entre boules blanches et noires dans l'urne, X_k et Y_k suivent la même loi, donc ont la même espérance.

Or $X_k+Y_k=k+2$, donc $\mathbb{E}(X_k+Y_k)=k+2=2\mathbb{E}(X_k)$. On en déduit que $\mathbb{E}(X_k)=\frac{k+2}{2}$.