DS 5

25.01.2025 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Résoudre le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right. \qquad (S)$$

3. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2,\ u_1 = 6, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n \end{array}\right.$$

Déterminer le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 – Étude d'une suite récurrente

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{array}\right.$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. *a.* Montrer que f est continue en 0.

   b. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, et donner l'expression de f' sur $\mathbb{R}^\star$.
2. *a.* Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$u : x \mapsto (1-x)\,\mathrm{e}^x - 1$$

   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x) < 0$.

   c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α (c'est-à-dire que $f(\alpha) = \alpha$), que l'on calculera.
4. *a.* Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.
   On pourra par exemple étudier la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1$ sur $[0, +\infty[$.

b. Exprimer $f'(x)+\frac{1}{2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. À l'aide de la question précédente, en déduire que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$$

c. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\quad |f(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis : si g est dérivable sur un intervalle I et $|g'(x)| \leqslant K$ pour tout $x \in I$, alors pour tous $a, b \in I$,

$$|g(b)-g(a)| \ \leqslant \ K\,|b-a|.$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1}-\alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha|\,.$$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha| \ \leqslant \ \frac{1}{2^n}\,|1-\alpha|,$$
et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
7. Compléter la fonction Python `f(x)` ci-dessous qui prend en entrée un réel x et renvoie $f(x)$, puis compléter le script qui suit pour afficher le plus petit entier n tel que $|u_n-\alpha| < 10^{-8}$.

```python
import numpy as np
def f(x):
    if ...:
        return ...
    else:
        return ...
```

```python
u=0
n=0
while ...
    u=...
    n=...
print(...)
```

Exercice 3 – Premier succès avec un nombre fini d'essais

La connexion à un serveur a une probabilité $p \in]0,1[$ de succès. On s'intéresse à une procédure qui consiste à faire au plus n tentatives indépendantes de connexion, où n est un entier supérieur ou égal à 2, et s'arrêter en cas de succès. En d'autres termes, on s'arrête dans l'une des deux situations suivantes :

– soit la connexion a été réussie,
– soit la connexion a échoué n fois.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

On note T_n la variable aléatoire correspondant au nombre de tentatives effectuées.

1. Justifier que l'ensemble $T_n(\Omega)$ des valeurs que peut prendre T_n est $[\![1,n]\!]$.

2. En introduisant les événements C_i : “la connexion réussit à la $i^{\text{ème}}$ tentative”, pour $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que si $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$\mathbb{P}(T_n = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p.$$

3. Toujours en ayant recours aux événements C_i, montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = (1-p)^{n-1}$.

4. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_n = k\right) = 1$.

5. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,
$$\sum_{k=1}^{n-1} k\, x^{k-1} \;=\; \frac{(n-1)\, x^n - n\, x^{n-1} + 1}{(1-x)^2}.$$

6. En déduire que $\mathbb{E}\left(T_n\right) = \dfrac{1-(1-p)^n}{p}$.

7. Compléter la fonction PYTHON `T(n)` suivante qui prend en entrée un entier n, et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

```
import numpy.random as rd
def T(n):
    k=1
    while ...:
        k=...
    return ...
```

8. Qu'affiche le script PYTHON suivant ?

```
N=10000
S=0
for k in range(N):
    S=S+T(n)
print(S/N)
```

Exercice 4 – Tirages successifs dans une urne

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le k-ième tirage, et on pose $X_0 = 1$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on pourra noter B_k l'événement décrit par : “la boule tirée au k-ième tirage est blanche”.

1. Préciser l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_1, et expliciter la loi de X_1. Donner son espérance.

2. En ayant recours aux événements B_k introduits ci-dessus, justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par : $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et
$$\mathbb{P}\left(X_2 = 1\right) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}\left(X_2 = 2\right) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}\left(X_2 = 3\right) = \frac{1}{6}.$$

3. On considère un entier $k \in \mathbb{N}^\star$. Justifier qu'il y a exactement $k+2$ boules dans l'urne après le k-ième tirage, et que l'ensemble des valeurs que peut prendre X_k est $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$.

4. Soit $i \in X_{k+1}(\Omega)$.

   a. Si l'événement $[X_k = i]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage, et en déduire $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = i)$.

   Si l'événement $[X_k = i-1]$ est réalisé, préciser le nombre de boules blanches et noires dans l'urne après le k-ième tirage, et en déduire $\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}(X_{k+1} = i)$.

   b. Si $j \in X_k(\Omega)$ avec $j \neq i-1$ et $j \neq i$, que dire de $\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left(X_{k+1} = i\right)$?

5. Déduire de ce qui précède que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $i \in X_{k+1}(\Omega)$,

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = i\right) \;=\; \frac{i}{k+2}\,\mathbb{P}\left(X_k = i\right) \,+\, \frac{3+k-i}{k+2}\,\mathbb{P}\left(X_k = i-1\right). \qquad (\star)$$

6. *a.* Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(X_k = 1\right) = \dfrac{1}{(k+1)!}$.

   b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\left(X_k = k+1\right)$.

   c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose
$$a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}\left(X_k = 2\right).$$
   En utilisant la formule $(\star)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = 2a_k + k + 1$.

   d. On introduit la suite $\left(b_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de terme général $b_k = a_k + k + 2$. Montrer que la suite $\left(b_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

   e. Exprimer le terme général b_k, puis le terme général a_k, et en déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}\left(X_k = 2\right) \;=\; \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}.$$

7. *a.* À l'aide de la formule $(\star)$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}(X_{k+1}) \;=\; \frac{k+1}{k+2}\,\mathbb{E}(X_k) + 1.$$

   b. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_k) \;=\; \dfrac{k+2}{2}$.

   c. En ayant recours à la variable aléatoire Y_k désignant le nombre de boules noires dans l'urne après k tirages, proposer une autre moyen de trouver le résultat de la question précédente.

$\star \quad \star$
$\star$