

DS 6

Corrigé

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Soit $F = \{(a + 2b + c, a + c, a + c, a + 2b), a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et en donner une base.
2. La famille $((1, 2, 2), (2, 3, 0), (-1, 0, 6))$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ? Justifier.
3. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$.
4. Calculer $\int_0^1 \frac{9}{2} x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx$.

1. On a $F = \{a(1, 1, 1, 1) + b(2, 0, 0, 2) + c(1, 1, 1, 0), a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 0))$, donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$. Par ailleurs,

$$F = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 2), (1, 1, 1, 0)) = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (0, -2, -2, 0), (0, 0, 0, -1)).$$

Par conséquent, la famille $((1, 1, 1, 1), (0, -2, -2, 0), (0, 0, 0, -1))$ est une famille génératrice de F . Comme elle est échelonnée, elle est libre. C'est donc une base de F .

2. On a

$$((1, 2, 2), (2, 3, 0), (-1, 0, 6)) \text{ libre} \Leftrightarrow ((1, 2, 2), (0, -1, -2), (0, 2, 8)) \text{ libre}$$

Or la famille $((1, 2, 2), (0, -1, -2), (0, 2, 8))$ est liée, car ses deux derniers vecteurs sont colinéaires. On en déduit donc que la famille $((1, 2, 2), (2, 3, 0), (-1, 0, 6))$ est liée.

3. On reconnaît que la fonction f est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 3$, dont une primitive est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{u(x)}$. Par conséquent, $F : x \mapsto -\frac{1}{x^2 + 3}$ est une primitive de f .
4. On a

$$\int_0^1 \frac{9}{2} x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 \underbrace{3x^2 \sqrt{x^3 + 3}}_{u'(x)\sqrt{u(x)}} dx = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} (x^3 + 3)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 4^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} = 8 - 3\sqrt{3}.$$

Exercice 2 – Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Limite de $(J_n)_n$

1. Justifier l'existence de l'intégrale J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer J_0 .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $J_{n+1} + J_n$ sous la forme d'une seule intégrale, et en déduire que

$$J_{n+1} = -J_n + \frac{1}{n+1}.$$

4. En déduire la valeur de J_1 .

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
6. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right).$$

7. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
8. Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer J_k en fonction de J_{k-1} et k à l'aide de la question 3, puis compléter la fonction PYTHON `J(n)` ci-dessous qui prend en entrée un entier `n` et retourne la valeur de J_n .

```
import numpy as np
def J(n):
    J=np.log(2)
    for k in range(...):
        J=...
    return ...
```

Un équivalent de $(J_n)_n$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx$$

9. Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la convergence de la suite $(I_n)_n$ vers 0.
10. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1) J_n - \frac{1}{2}.$$

11. En déduire la limite de la suite $(nJ_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis un équivalent de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale J_n est bien définie.
2. On a $J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(|1+x|)]_0^1 = \ln 2$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx.$$

Par conséquent, on a $J_n + J_{n+1} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

4. On déduit de la relation de la question précédente avec $n = 0$ que $J_1 = 1 - J_0 = 1 - \ln 2$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{1}{(1+x)} \leq 1$, donc $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$, du fait que $x^n \geq 0$.

Donc, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

On a ainsi montré que $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

Comme $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on obtient par encadrement que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

6. Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n = 1$: $(-1)^1 \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = -(\ln(2) - 1) = 1 - \ln 2 = J_1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{1}{n+1} - J_n = \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) \\ &= -(-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

On a donc bien montré par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7. D'après la question précédente, on a $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = J_n$. Or d'après la question 5., on a

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - \frac{1}{2}, \quad \text{donc} \quad J_n = \frac{I_{n+1}}{n+2} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Comme $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{I_{n+1}}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

8. Pour tout entier $k \geq 1$, on a $J_k = -J_{k-1} + \frac{1}{k}$.

```
import numpy as np
def J(n):
    J=np.log(2)
    for k in range(1,n+1):
        J=-J+1/k
    return J
```

9. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ est continue, donc l'intégrale I_n existe.

Par ailleurs, on note que comme dans la question 5, on a $0 \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

De même, le théorème d'encadrement entraîne que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

10. Si $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto -\frac{1}{1+x}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[-\frac{x^{n+1}}{1+x} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \left(-\frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= (n+1) \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} + (n+1)J_n. \end{aligned}$$

11. On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$nJ_n = \frac{1}{2} + I_{n+1} - J_n.$$

Comme $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a aussi $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et on sait que $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent, $nJ_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.
 Finalement, on a $\frac{J_n}{\frac{1}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire que $J_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 3 – Limite d'une suite

Le but de l'exercice est de calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(\frac{t^2}{1+t^2} - 1 \right) dt,$$

et en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, écrire $\ln(u_n)$ sous la forme $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, où on précisera la fonction f .
4. Déterminer la limite de la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, puis la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
5. Compléter le script PYTHON ci-dessous, qui calcule et affiche une valeur approchée de l'intégrale de la question 2 à l'aide de la méthode des rectangles.

```
import numpy as np
n=...
S=0
for k in range(...):
    S=...
print("Approximation de l'intégrale :",...)
```

1. L'intégrale est bien définie car son intégrande est continue sur $[0, 1]$. Par ailleurs, on a

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{-1}{1+x^2} \right) dx = [-\arctan x]_0^1 = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - \int_0^1 1 dx = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{donc} \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

2. Comme les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x^2) dx &= [x \ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \ln 2 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln u_n = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \sum \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)$$

Ainsi, $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$, où $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

Comme f est continue sur $[0, 1]$ et qu'on reconnaît une somme de Riemann, on a

$$\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$$

4. D'après les deux questions précédentes, on a $\ln u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$. Par composition de limites, on a alors

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}.$$

5. On choisit une grande valeur de n , par exemple $n = 1000$. Le programme consiste à renvoyer la somme de Riemann correspondante, qui donne l'approximation de l'intégrale par la méthode des rectangles à droite.

```
import numpy as np
n=1000
S=0
for k in range(1,n+1):
    S=S+np.log(1+(k/n)**2)
print("Approximation de l'intégrale :",S/n)
```

Exercice 4 – Polynômes et diviseurs

Dans cet exercice, on considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

- On considère la famille $\mathcal{B} = (1, x - 1, (x - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
 - Justifier que $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(1, x, x^2)$.
 - Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Factoriser complètement le polynôme P . On précisera les racines de P et leurs multiplicités.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le polynôme $A_n(x) = x^n - 2x + 1$. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
 - Si $n \in \mathbb{N}$, justifier qu'il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tels que $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ et
$$A_n(x) = P(x)Q_n(x) + R_n(x). \quad (1)$$
 - Justifier qu'il existe des réels a_n, b_n, c_n uniques tels que $R_n(x) = a_n + b_n(x - 1) + c_n(x - 1)^2$.
 - Justifier que $(PQ_n)'(1) = 0$.
 - À l'aide de (1), déterminer a_n, b_n et c_n .
- Existe-t-il un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que P divise le polynôme A_n ?

- On sait que l'espace engendré par une famille est inchangé si on ajoute à un vecteur de la famille

une combinaison linéaire des autres. Ainsi,

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\mathcal{B}) &= \text{Vect}(1, x-1, x^2-2x+1) = \text{Vect}(1, \underbrace{x}_{x-1+1}, \underbrace{x^2-2x}_{x^2-2x+1-1}) \\ &= \text{Vect}(1, x, \underbrace{x^2}_{x^2-2x+2x}).\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(1, x, x^2)$.

b. D'après la question précédente, on a $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$, donc la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[x]$. Par ailleurs, $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée en degré de polynômes non nuls, donc elle est libre. Ainsi, $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. On remarque que 1 est racine de P . Par ailleurs, le polynôme dérivé de P s'écrit $P'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, qui a également 1 pour racine. Comme $P''(1) \neq 0$, la multiplicité de la racine 1 de P est 2.

La division euclidienne de P par $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ donne que $P(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Ainsi, les racines de P sont 1 et 2, de multiplicités respectives 2 et 1.

3. a. Le théorème de la division euclidienne entraîne l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[x]$ tels que $A_n = PQ_n + R_n$ et $\deg R_n < \deg P = 3$, c'est-à-dire que $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$.
- b. Nous avons vu que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$, comme $R_n \in \mathbb{R}_2[x]$, il existe des réels a_n, b_n, c_n uniques tels que $R_n = a_n + b_n(x-1) + c_n(x-1)^2$.
- c. Nous avons vu que $P(1) = P'(1) = 0$. Par conséquent, comme $(PQ_n)' = P'Q_n + PQ_n'$,

$$(PQ_n)'(1) = P'(1)Q_n(1) + P(1)Q_n'(1) = 0.$$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que comme 1 est racine double de P , 1 est racine de multiplicité au moins 2 de PQ_n , d'où le résultat.

d. D'après (1), on a :

- en évaluant en $x = 1$: $A_n(1) = P(1)Q_n(1) + a_n$, c'est-à-dire $0 = a_n$,
- en évaluant en $x = 2$: $A_n(2) = P(2)Q_n(2) + a_n + b_n + c_n$, c'est-à-dire $2^n - 3 = a_n + b_n + c_n$.

Par ailleurs, comme on a aussi $A_n' = (PQ_n)' + R_n'$, on obtient en évaluant en 1 :

$$A_n'(1) = (PQ_n)'(1) + R_n'(1).$$

Comme $A_n'(x) = nx^{n-1} + 2$ et $R_n'(x) = b_n + 2c_n(x-1)$, on a alors

$$n + 2 = b_n.$$

On a donc obtenu les conditions

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = n - 2 \\ a_n + b_n + c_n = 2^n - 3 \end{cases}$$

Par conséquent, $a_n = 0$, $b_n = n - 2$ et $c_n = 2^n - n - 1$.

4. On sait que P divise le polynôme A_n si et seulement si le reste R_n dans la division euclidienne de A_n par P est nul, c'est-à-dire si et seulement si ses coordonnées a_n, b_n, c_n dans la base $\mathcal{B}$ sont nuls.

D'après la question précédente, ceci se récrit

$$\begin{cases} n - 2 = 0 \\ 2^n - n - 1 = 0 \end{cases}$$

Comme $2^2 - 2 - 1 \neq 0$, c'est impossible. Il n'existe donc pas d'entier n tel que P divise A_n .

Exercice 5 – Étude d’une équation différentielle (d’après HEC-ESSEC 2020)

Dans cet exercice, on détermine des fonctions f à valeurs dans $]0, 1[$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 3(f(t))^2 (1 - f(t)) \quad (E)$$

Partie 1 – Questions préliminaires

1. On note u l’application définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad u(t) = \frac{t}{1-t} e^{-1/t}.$$

- a. Justifier que $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0$. Que vaut $\lim_{t \rightarrow 0^-} u(t)$?
 b. Justifier que u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Calculer u' sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad u'(t) = \frac{1}{v(t)} e^{-1/t},$$

où v est la fonction polynomiale donnée par $v : t \mapsto t(1-t)^2$.

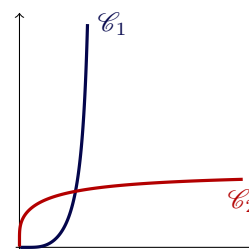
- c. Dresser le tableau de variations de la fonction u .

2. Soit φ l’application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- a. Justifier que l’application φ réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $\mathbb{R}_+$.
 b. Montrer que φ est dérivable sur $[0, 1[$.
 c. Justifier que φ^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$.
 d. Le script PYTHON suivant renvoie les tracés ci-dessous. Identifier, en justifiant, les deux courbes représentées.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
X=np.linspace(0.1,0.9,100)
Y = X/(1-X)*np.exp(-1/X)
plt.plot(X,Y)
plt.plot(Y,X)
plt.show()
```



Partie 2 – Une classe de solutions

3. a. Montrer que pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, 1[$, la fonction composée $g : t \mapsto \ln(\varphi(f(t)))$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{(1-f(t))f(t)^2}.$$

- b. Pour tout réel $a \in]0, 1[$, on définit la fonction f_a par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_a(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{3t})$$

Montrer que f_a est bien définie et que $f_a(0) = a$.

- c. Montrer que f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- d. Montrer que f_a est à valeurs dans $]0, 1[$.
- e. Déterminer $\ln \circ \varphi \circ f_a$. En déduire, à l'aide de la question 3a. que f_a vérifie l'équation (E).
4. Démontrer que la fonction f_a est monotone. Quelles en sont les limites en $-\infty$ et $+\infty$?

1. a. On sait que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-1/t} = 0$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{1-t} = 0$, on obtient par produit

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t) = 0.$$

Par contre, $\lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{1}{t} = +\infty$, donc par croissances comparées du type $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on a

$$te^{-1/t} = -\frac{e^{-1/t}}{-\frac{1}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} -\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 0^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{1-t} e^{-1/t} = -\infty.$$

- b. Sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto \frac{t}{1-t}$ sont dérivables donc u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$u'(t) = \frac{1-t-t(-1)}{(1-t)^2} e^{-1/t} + \frac{t}{1-t} \times \frac{1}{t^2} e^{-1/t} = \left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1-t)t} \right) e^{-1/t},$$

donc $u'(t) = \frac{1}{(1-t)^2 t} e^{-1/t}$. On a donc la relation de l'énoncé en posant $v(t) = t(1-t)^2$.

- c. Le signe de $u'(t)$ est celui de $v(t)$, qui est celui de t donc le tableau de variations est immédiat. Ainsi, sur $] -\infty, 0[$, u est strictement décroissante, sur $]0, 1[$, u est strictement croissante, et sur $]1, +\infty[$, u est strictement croissante. On peut calculer facilement les différentes limites suivantes.

$$\star \frac{t}{1-t} = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -1, \text{ et } \frac{t}{1-t} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} -1. \text{ Comme } \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-1/t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-1/t} = 1,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = -1.$$

$$\star \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t}{1-t} = +\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 1^-} u(t) = +\infty.$$

$$\star \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t}{1-t} = -\infty \text{ donc } \lim_{t \rightarrow 1^+} u(t) = -\infty.$$

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
t	$-$	0	$+$	$+$
$u'(t)$	$-$	$+$	$+$	
$u(x)$	$-1 \rightarrow -\infty$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow -1$	

2. a. On sait que u est dérivable sur $]0, 1[$ donc φ est continue sur $]0, 1[$. Avec la valeur $\varphi(0) = 0$, on a

$$\varphi(0) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (u(t)) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\varphi(t))$$

donc φ est continue en 0, ce qui entraîne que φ est continue sur $[0, 1[$.

La fonction u est strictement croissante sur $]0, 1[$ donc φ l'est également. Par continuité, φ est donc strictement croissante sur $[0, 1[$, et on en déduit qu'elle définit une bijection de $[0, 1[$ vers

$$\left[\varphi(0), \lim_{1^-} (\varphi) \right] = [0, +\infty[.$$

- b. La fonction u est dérivable sur $]0, 1[$, donc φ est dérivable sur $]0, 1[$. Etudions sa dérivabilité en 0 : pour tout $t \in]0, 1[$,

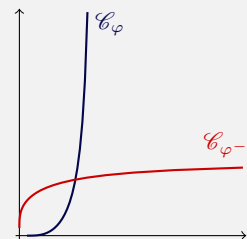
$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{1-t} e^{-1/t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. La fonction φ est donc dérivable sur $[0, 1[$.

- c. Si $t \in]0, 1[$, on a $u'(t) \neq 0$, donc $\varphi'(t) \neq 0$. Ainsi, φ' s'annule uniquement en 0. On sait donc que φ^{-1} est dérivable en tout point, sauf en $\varphi(0) = 0$.

La fonction φ^{-1} est donc dérivable sur $]0, +\infty[$, mais n'est pas dérivable en 0.

- d. Ce script calcule, pour des réels compris entre 0,1 et 0,9, stockés dans **X**, leurs images par φ , stockées dans **Y**. Il réalise ensuite via `plt.plot(X,Y)` le tracé de **Y** en fonction de **X** : c'est le tracé du graphe de φ (courbe bleue, qui correspond d'ailleurs à la restriction de u à $[0, 1]$, tracée plus tôt). Si on échange **X** et **Y**, alors on trace avec `plt.plot(Y,X)` le graphe de φ^{-1} .



3. a. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $]0, 1[$. En composant par φ qui est $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1[$ vers $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\varphi \circ f$ est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. On peut alors composer par la fonction $\ln$, et $\ln \circ \varphi \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

En particulier, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$(\ln \circ \varphi \circ f)' = \frac{(\varphi \circ f)'}{\varphi \circ f} = \frac{f' \times (\varphi' \circ f)}{\varphi \circ f} = \frac{f' \times \left(\frac{1}{(1-f)^2} e^{-1/f} \right)}{\frac{f}{1-f} e^{-1/f}} = \frac{f'}{(1-f)f^2}.$$

- b. La fonction φ réalise une bijection de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}_+$ donc $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, 1[$. Or, pour tout réel $a \in]0, 1[$ et tout réel t , $\varphi(a)e^{3t} \in \mathbb{R}_+$ donc $f_a(t)$ est bien défini. De plus, $f_a(0) = \varphi^{-1}(\varphi(a)) = a$.
- c. Comme $a \in]0, 1[$, on a $\varphi(a) \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(a)e^{3t} \in \mathbb{R}_+^*$. On a vu que φ^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- d. Comme l'image de φ^{-1} est $]0, 1[$, f_a est à valeurs dans $]0, 1[$. Par ailleurs, l'unique antécédent de 0 par φ^{-1} est 0. Comme $\varphi(a)e^{3t} \neq 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, on a $f_a(t) = \varphi^{-1}(\varphi(a)e^{3t}) \neq 0$. Ainsi, f_a est à valeurs dans $]0, 1[$.
- e. Pour tout réel t , on a $(\ln \circ \varphi \circ f_a)(t) = \ln(\varphi(a)e^{3t}) = \ln(\varphi(a)) + 3t$. La question 3.a. permet de montrer directement que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f'_a(t)}{(1 - f_a(t))(f_a(t))^2} = (\ln \circ \varphi \circ f_a)'(t) = 3,$$

ce qui permet de conclure que f_a vérifie l'équation (E).

4. Comme f_a est à valeurs dans $]0, 1[$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $3f_a^2(t)(1 - f_a(t)) > 0$, donc $f'_a(t) > 0$. Par conséquent, la fonction f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{t \rightarrow -\infty} (\varphi(a)e^{3t}) = 0$. En composant par φ^{-1} , continue en 0, $\lim_{t \rightarrow -\infty} (f_a(t)) = 0$.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varphi(a)e^{3t}) = +\infty$. En composant par φ^{-1} , $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f_a(t)) = 1$.