

Concours blanc 2

07.05.2024 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1

On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction $f \in E$, on note g_f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

$$g_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Propriétés de g_f

1. *Exemple 1.* On suppose que $f = \cos$. Calculer $g_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g_f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. *Exemple 2.* On suppose que $f = \exp$. Calculer $g_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g_f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in E$.
 - a. Montrer que g_f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g'_f(x) = \frac{f(x) + f(-x) - 2g_f(x)}{2x}.$$

On pourra avoir recours à une primitive F de f , après avoir justifié son existence.

- b. Montrer que g_f est une fonction paire.
 - c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_f(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(xu) du$.
 - d. Dédurre de la question précédente que si f est impaire, alors g_f est une fonction impaire également.
- En conclure que si f est impaire, alors $g_f = 0_E$, où 0_E désigne la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Etude d'un endomorphisme de E

On introduit l'application $\Phi : E \rightarrow E$, qui est bien définie d'après la question précédente.

$$f \mapsto g_f$$

En d'autres termes, pour toute fonction $f \in E$, on a $\Phi(f) = g_f$.

4. Montrer que Φ est un endomorphisme de E .
 5. Montrer que $\text{Ker } \Phi = \{f \in E, f \text{ est impaire}\}$.
- On pourra avoir recours aux questions 3a et 3d.*
6. Justifier que Φ n'est ni injective, ni surjective.

Étude d'un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[x]$

On pose $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose

$$Q_P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x P(t) dt & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ P(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a donc $Q_P = \Phi(P)$.

7. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note P_k le polynôme $P_k(x) = x^k$. Montrer que

$$Q_{P_k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \frac{1}{k+1} x^k & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

8. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors Q_P est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.

On note alors Φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par $\Phi_n : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$.

$$P \mapsto Q_P$$

9. *Cas $n = 2$.*

- Après avoir rappelé une base de $\mathbb{R}_2[x]$, déterminer $\text{Im } \Phi_2$. En déduire $\text{rg } \Phi_2$ ainsi que $\dim \ker \Phi_2$.
- Donner la matrice de l'endomorphisme Φ_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

10. *Cas général.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\text{rg } \Phi_n$. On pourra faire une distinction selon la parité de n .

Exercice 2 – Étude d'une suite définie implicitement

Dans tout cet exercice, on fixe a un réel tel que $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale f_n par

$$f_n : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

- Pour tout réel x et pour tout entier naturel k , on note $t_k(x) = \frac{x^k}{k!}$. Pour k un entier naturel non nul, exprimer $t_k(x)$ en fonction de $t_{k-1}(x)$, x et k .
 - Recopier et compléter la fonction PYTHON suivante qui, prenant en entrée les valeurs de l'entier n et du réel x , renvoie la valeur de $f_n(x)$.

```
def f(n,x):
    t=1; S=1
    for k in range(1,n+1):
        t=...
        S=...
    return S
```

- Justifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé, l'équation $f_n(x) = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n l'unique réel solution dans $\mathbb{R}_+$ de $f_n(x) = a$. On a donc $f_n(u_n) = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit x un réel positif. Montrer que la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante et préciser sa limite. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $f_n(x) \leq e^x$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n) \geq a$, puis que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
 - Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
- Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\ln(a) \leq u_n$.
 - Soit K un réel positif et minorant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Montrer que $e^K \leq a$.
- Déduire des questions précédentes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(a)$.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$R_n(x) = \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

7. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

On considère dorénavant un réel M strictement positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq M.$$

- b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq R_n(u_n) \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$.

- c. En déduire que $R_n(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

8. a. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^x = f_n(x) + R_n(x)$.

- b. En se rappelant que $f_n(u_n) = a$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déduire des deux questions précédentes que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(a) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Problème – Déplacement aléatoire d'un mobile

Dans cet exercice, on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Les parties A et B sont indépendantes, à l'exception de la question 8 qui utilise les résultats de la partie A.

Partie A – Étude d'un espace de suites

Soit $p \in]0, 1[$. On pose

$$S = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - pu_n = \alpha + \beta n\}.$$

- Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- a. On introduit les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = p^n, \quad b_n = 1, \quad c_n = n.$$

Montrer que la famille $((a_n), (b_n), (c_n))$ est une famille libre.

- b. Vérifier que (a_n) , (b_n) et (c_n) appartiennent à S .

- On note $F = \text{Vect}((a_n))$ et $G = \text{Vect}((b_n), (c_n))$.

- a. Justifier que F et G sont en somme directe.

- b. Soit (u_n) un élément de S . On sait donc qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - pu_n = \alpha + \beta n$. On introduit alors les suites (v_n) et (w_n) définies par

$$v_n = \frac{\beta}{1-p}n + \frac{\alpha}{1-p} - \frac{\beta}{(1-p)^2}, \quad w_n = u_n - v_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(v_n) \in G$ et $(w_n) \in F$.

- c. En déduire que F et G sont supplémentaires dans S , et en déduire que $((a_n), (b_n), (c_n))$ est une base de S .

Partie B – Étude de l'expérience aléatoire

On s'intéresse au déplacement aléatoire d'un mobile sur un axe représenté par les entiers naturels. Le déplacement est guidé par le protocole suivant.

- À l'étape 0, le mobile est à la position 0.
- À l'étape n , on lance une pièce telle que la probabilité d'obtenir *pile* est de p , et la probabilité d'obtenir *face* est de $1 - p$,
 - ★ si on obtient *pile*, le mobile se déplace d'une unité vers la droite (sa position augmente de 1),

- ★ si on obtient *face*, alors on tire au hasard et de manière équiprobable un entier parmi $0, 1, \dots, n$, et le mobile se déplace vers cette position. Le lancer de pièce et le tirage au sort sont alors supposés indépendants.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note X_n la variable aléatoire qui correspond à la position du mobile au terme de l'étape n .

4. Compléter la fonction `simuleX` ci-dessous, qui prend pour entrée les paramètres n et p , et retourne une simulation de la variable aléatoire X_n .

```
import numpy.random as rd
def simuleX(n,p):
    X=...
    for...:
        if ...:
            X=...
        else:
            X=...
    return X
```

5. Déterminer $X_n(\Omega)$, en justifiant.
6. Calculer $\mathbb{E}(X_0)$.
7. On fixe $n \in \mathbb{N}$. Cette question a pour but d'établir un lien entre $\mathbb{E}(X_{n+1})$ et $\mathbb{E}(X_n)$. On pourra avoir recours aux événements :

- ★ F_{n+1} : "on obtient *face* à l'étape $n+1$ ",
- ★ A_k : "le tirage au sort donne la position k pour le mobile", pour $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

- a. Calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$.
- b. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = p\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{1-p}{n+2}.$$

Cette égalité est-elle vraie pour $k=0$?

- c. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = p\mathbb{E}(X_n) + p + \frac{(1-p)(n+1)}{2}$.
- d. Compléter la fonction PYTHON suivante, qui prend en entrée un entier n , et retourne la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.

```
def E(n,p):
    E=...
    for ...:
        E=...
    return E
```

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \mathbb{E}(X_n)$.
 - a. Montrer que $(u_n) \in S$, en précisant les valeurs de α et β qui correspondent.
 - b. À l'aide de la question 3b, calculer u_n en fonction de n et p .
 - c. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

