

DS 7 – Concours blanc 2

Corrigé

Exercice 1 – Matrices et endomorphismes nilpotents

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k est la matrice nulle. Si de plus A^{k-1} n'est pas nulle, on dit que k est l'indice de nilpotence de A .
En d'autres termes, l'indice de nilpotence de A est le plus petit entier naturel k tel que A^k est nulle.
- On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^k = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ est l'application nulle. Si de plus φ^{k-1} n'est pas nulle, on dit que k est l'indice de nilpotence de φ .

Les parties 1 à 4 sont indépendantes.

Partie 1 On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donné par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto (2x + 2y + z, -2x - 2y - z, x + y) \end{aligned}$$

1. Soient $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$.
 - a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - b. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Montrer que A est nilpotente, on précisera son indice de nilpotence. Qu'en déduire de f ?

Partie 2 Dans cette partie, $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

3. Calculer $A^2 - (a + d)A$ en fonction de la matrice identité I_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .
 - a. Justifier que $ad - bc = 0$.
 - b. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $A^n = (a + d)^{n-1}A$.
 - c. En déduire que $a + d = 0$.
5. Déduire de ce qui précède que A est nilpotente si et seulement si $A^2 = 0$.

Partie 3 Dans cette partie, $n = 2$, c'est-à-dire que $\dim E = 2$. On considère $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence 2, c'est-à-dire que $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

6. Montrer que $\text{Im } \varphi \subset \ker \varphi$.
7. En déduire que $\dim \text{Im } \varphi = \dim \ker \varphi = 1$, puis que $\text{Im } \varphi = \ker \varphi$.
8. On considère $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0_E$, où 0_E est le vecteur nul de E . Montrer que $(\varphi(u), u)$ est une base de E .
9. On note $v_1 = \varphi(u)$ et $v_2 = u$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.

Partie 4

10. Compléter la fonction PYTHON suivante, qui prend en entrée une matrice A nilpotente, et renvoie son indice de nilpotence.

```

import numpy as np
def indice(A):
    M=A
    k=1
    while np.max(abs(M))...
        M=...
        k=...
    return k

```

1. a. On a $\text{rg } \mathcal{B}' = \text{rg}((1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 0, 1)) = \text{rg}((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1)) = 3$ car la famille échelonnée $((1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, 0, 1))$ est libre. Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une famille de $\mathbb{R}^3$ de rang 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

- b. On a $f(u_1) = (0, 0, 0)$, $f(u_2) = (1, -1, 0) = u_1$ et $f(u_3) = (1, -1, 1) = u_1 + u_2$, ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. On remarque que $A^2 = E_{3,1}$ et $A^3 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, donc A est nilpotente, d'indice de nilpotence 3.

Comme $A^2 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^3 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, on en déduit que $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, et $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc f est nilpotent d'indice de nilpotence 3.

3. On a $A^2 - (a + d)A = -(ad - bc)I_2$.

4. a. Si A est inversible, on sait que A^i est inversible pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme on a A^k est nulle donc non inversible, on en déduit que A n'est pas inversible. Par conséquent, $\det A = ad - bc = 0$.
 b. Comme A est non nulle, on a $k \neq 1$. Ceci entraîne que $k \geq 2$.
 c. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = (a + d)^{n-1}A$ est vraie pour tout $n \geq 2$ ".
 - D'après 1. et 2.a, $A^2 - (a + d)A = -(ad - bc)I_2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
 - Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a

$$A^{n+1} = A A^n = (a + d)^{n-1} A^2 = (a + d)^n A.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

On a donc montré que pour tout $n \geq 2$, $A^n = (a + d)^{n-1}A$.

- d. Supposons que $a + d \neq 0$. On a alors $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = A^k = (a + d)^{k-1}A$ d'après la question précédente. Comme $a + d \neq 0$, on en déduit que $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, ce qui est une contradiction.

5. Si A est nilpotente, alors $a + d = 0$ d'après ce qui précède. Ainsi, on a $A^2 = (a + d)A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ par la question 1. Ceci entraîne que $k \leq 2$. Finalement, $k = 2$, du fait qu'on a aussi $k \geq 2$.

6. Soit $v \in \text{Im } \varphi$, c'est-à-dire qu'il existe $u \in E$ tel que $v = \varphi(u)$. On a alors $\varphi(v) = \varphi(\varphi(u)) = 0_E$. Autrement dit, $v \in \ker \varphi$. On a donc bien montré que $\text{Im } \varphi \subset \ker \varphi$.

7. Le théorème du rang donne que $\dim \text{Im } \varphi + \dim \ker \varphi = 2$. Or, par la question précédente, on a $\dim \text{Im } \varphi \leq \dim \ker \varphi$. On en déduit alors que

$$\dim \text{Im } \varphi + \dim \ker \varphi \leq 2 \dim \ker \varphi, \text{ donc } 2 \dim \ker \varphi \geq 2.$$

Ainsi, $\dim \ker \varphi \geq 1$. On ne peut pas avoir $\dim \ker \varphi = 2$, sinon, on aurait $\ker \varphi = E$, c'est-à-dire que $\varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a donc bien $\dim \ker \varphi = 1$, et $\dim \text{Im } \varphi = 1$, toujours par la formule du rang.

8. Comme E est de dimension 2, il suffit de montrer que la famille $(\varphi(u), u)$ est libre pour en déduire que c'est une base de E . Supposons qu'on a $\lambda \varphi(u) + \mu u = 0_E$, et montrons qu'alors $\lambda = \mu = 0$. En composant par φ , on obtient

$$\varphi(\lambda \varphi(u) + \mu u) = \lambda \varphi(\varphi(u)) + \mu \varphi(u) = 0_E.$$

Comme $\varphi^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$, ceci donne que $\mu\varphi(u) = 0_E$. Comme par ailleurs $\varphi(u) \neq 0_E$, on a $\mu = 0$. En revenant à l'égalité de départ, on a alors $\lambda\varphi(u) = 0_E$, ce qui donne aussi $\lambda = 0$.

Finalement, la famille $(\varphi(u), u)$ est bien libre, c'est donc une base de E .

9. On a $\varphi(v_1) = \varphi(\varphi(u)) = 0_E$ d'une part, et $\varphi(v_2) = \varphi(u) = v_1$ d'autre part. Ainsi, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 – Somme de trois séries – Ecricome 2025

1. Justifier que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergent.

On note

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Montrer que $A - B = 2C$ et $A = C + \frac{1}{4}A$.
3. a. Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels, $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.
- b. Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi[, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- a. Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

- b. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

- c. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

5. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- a. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et déterminer φ' .
- b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0.

On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

- c. Montrer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

- d. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On admet que $\forall t \in [0, \pi[, f(t) = \varphi(\pi - t)$. Justifier que la fonction f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

6. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$
- b. En déduire, pour tout entier naturel N non nul, que

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. a. Montrer que $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- b. En déduire les valeurs de A et B .

1. a. On reconnaît une série de Riemann convergente.
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc elle converge.
- c. On a $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc par comparaison des termes généraux positifs, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge aussi.

2. Les trois séries convergent donc leurs combinaisons linéaires convergent. On a

$$A - B = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \sum_{\substack{n=1, \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$$

$$\text{car } 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair.} \\ 2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}. \text{ Ainsi, } A - B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 2C.$$

Par ailleurs,

$$C + \frac{1}{4}A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = A,$$

en regroupant les termes pairs et impairs.

3. a. On sait que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta), \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha) \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \sin(-\beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta), \end{aligned}$$

On somme pour obtenir $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta)$.

- b. On fixe $t \in [0, \pi[,$ de sorte que $\frac{t}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\cos(\frac{t}{2}) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{P}_n : \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On a d'une part $\sum_{k=1}^1 (-1)^k \cos(kt) = -\cos(t)$. D'autre part,

$$-\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{3}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{\cos\left(t - \frac{t}{2}\right) + \cos\left(t + \frac{t}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\frac{2 \cos(t) \cos\left(\frac{1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} = -\cos(t),$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) \\
 &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} + (-1)^{n+1} \cos((n+1)t) \text{ d'après } \mathcal{P}_n \\
 &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\
 &= -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - (\cos\left(\frac{t}{2} + (n+1)t\right) + \cos((n+1)t - \frac{t}{2}))}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\
 &= -\frac{1}{2} + (-1)^{n+1} \frac{\cos\left(\frac{2(n+1)+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. a. La fonction f est $\mathcal{C}^1$ donc continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est bornée, de même f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est bornée ainsi il existe M_0 et M_1 dans $\mathbb{R}^+$ tels que, pour tout $t \in [a, b]$, on a $|f(t)| \leq M_0$ et $|f'(t)| \leq M_1$. On pose $M = \max(M_0, M_1)$ et M domine $|f|$ et $|f'|$ sur $[a, b]$.
- b. Soit $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto f'(t) \sin(\lambda t)$ est continue sur le segment $[a, b]$, on peut donc intégrer. L'inégalité triangulaire donne

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \int_a^b |f'(t) \sin(\lambda t)| dt.$$

Or pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t) \sin(\lambda t)| \leq M$ d'après la question précédente. Ainsi, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{\lambda} \left| \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_a^b M dt = \frac{1}{\lambda} M(b-a).$$

Comme $\frac{1}{\lambda} M(b-a) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$, on obtient par encadrement que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \right) = 0$.

- c. Soit $\lambda > 0$. Les fonction $u : t \mapsto f(t)$ et $v : t \mapsto \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt &= \left[\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda t) f(t) \right]_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt \\
 &= \frac{\sin(\lambda b) f(b)}{\lambda} - \frac{\sin(\lambda a) f(a)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt.
 \end{aligned}$$

On a

$$0 \leq \left| \frac{\sin(\lambda b) f(b)}{\lambda} \right| \leq \frac{M}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

donc par encadrement, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(\lambda b) f(b)}{\lambda} \right) = 0$, et de même $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin(\lambda a) f(a)}{\lambda} \right) = 0$.

Par somme, on conclut que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt \right) = 0.$$

5. a. Pour tout $t \in]0, \pi]$, on a $\frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$. Ainsi la fonction $t \mapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et ne s'annule pas. La fonction $t \mapsto t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ donc, par quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$, la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$. Le calcul donne

$$\varphi'(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2}.$$

b. On sait que $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2}$ car $\frac{t}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc $\varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{\left(\frac{t}{2}\right)} = 2$ donc φ a une limite finie en 0 et φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 2$.

c. On utilise le théorème de prolongement. On sait que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$, continue en 0. Si on montre que φ' a une limite finie ℓ en 0 alors φ sera $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, et $\varphi'(0) = \ell$.

On rappelle les développements limités :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t}{2} + o(t^2) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

donc

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t}{2} - \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) + o(t^2) = o(t^2).$$

Et

$$\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^2}{4} + o(t^2)$$

$$\text{donc } \varphi'(t) = \frac{o(1)}{\frac{t}{4} + o(1)} \underset{t \rightarrow 0}{=} 0.$$

Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et $\varphi'(0) = 0$.

d. Pour tout $t \in [0, \pi[$, on a $\pi - t \in]0, \pi]$ et $f(t) = \varphi(\pi - t)$ donc, par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi[$. Et par continuité de φ en 0 on a $\lim_{t \rightarrow \pi} (f(t)) = \lim_{t \rightarrow \pi} (\varphi(\pi - t)) = \varphi(0) = 2$. Donc f est prolongeable par continuité en 0. De plus, pour tout $t \in [0, \pi[$,

$$f'(t) = -\varphi'(\pi - t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\varphi'(0) = 0 \text{ car } \varphi' \text{ continue en 0.}$$

Bilan : f se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

6. a. Les fonction $u : t \mapsto \pi - t$ et $v : t \mapsto \frac{1}{k} \sin(kt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. On a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt &= \left[\frac{1}{k} \sin(kt) (\pi - t) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt \\ &= \left[-\frac{1}{k^2} \cos(kt) \right]_0^\pi = \frac{1}{k^2} (1 - \cos(k\pi)) = \frac{1}{k^2} (1 - (-1)^k) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

- b. La somme contient un nombre fini de termes, on peut donc utiliser la linéarité de l'intégration. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt &= \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{2j} \underbrace{\int_0^\pi (\pi - t) \cos(2jt) dt}_{=0} + \sum_{j=0}^N (-1)^{2j+1} \underbrace{\int_0^\pi (\pi - t) \cos((2j+1)t) dt}_{=\frac{2}{(2j+1)^2}} \\ &= \sum_{j=0}^N (-1)^{2j+1} \frac{2}{(2j+1)^2} = -2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{(2j+1)^2}. \end{aligned}$$

7. a. On reprend le résultat de la question 3(b)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt &= \int_0^\pi (\pi - t) \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi -\frac{1}{2} (\pi - t) dt + (-1)^{2N+1} \int_0^\pi (\pi - t) \frac{\cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2} t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^\pi -\frac{1}{2}(\pi - t)dt + \frac{(-1)^{2N+1}}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right) dt.$$

Avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, la question 4(c) donne

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right) dt \right) = 0.$$

Comme $\frac{(-1)^{2N+1}}{2}$ vaut $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$, on a aussi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^{2N+1}}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right) dt \right) = 0.$$

Donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_0^\pi -\frac{1}{2}(\pi - t)dt + \frac{(-1)^{2N+1}}{2} \int_0^\pi f(t) \cos\left(\frac{2(2N+1)+1}{2}t\right) dt \right) = \int_0^\pi -\frac{1}{2}(\pi - t)dt.$$

Avec la question 6(b), on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{(2j+1)^2} \right) = \int_0^\pi -\frac{1}{2}(\pi - t)dt.$$

Donc

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\pi - t)dt = \frac{1}{4} \left[-\frac{(\pi - t)^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{8}.$$

b. De $A = C + \frac{1}{4}A$ on déduit $\frac{3}{4}A = C$ et $A = \frac{4}{3}C = \frac{\pi^2}{6}$.

De $A - B = 2C$ on déduit $B = A - 2C = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3 – Trois expériences aléatoires

Dans ce problème, n est un entier fixé tel que $n \geq 2$. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

- l’urne U_1 contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires,
- l’urne U_2 contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d’une boule *avec remise* de cette boule dans l’urne dont elle provient, selon *trois protocoles différents* étudiés dans les trois parties du problème.

On note $\star X$ le numéro du tirage où l’on obtient, pour la première fois, une boule noire,

$\star Y$ le numéro du tirage où l’on obtient, pour la première fois, une boule blanche.

On pourra utiliser les événements suivants.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l’événement “on obtient une boule blanche au i -ème tirage”.
- On note U l’événement “le premier tirage a lieu dans l’urne U_1 ”.

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l’urne qui a été choisie au premier tirage.

1. a. Compléter la fonction `simule(n)` suivante, qui prend en entrée l’entier n et renvoie une simulation de la variable aléatoire X pour l’expérience décrite dans cette partie.

```
import numpy.random as rd
def simule(n):
    X=0
    if ...: # Tirage dans l'urne U1
        X=...
    else: # Tirage dans l'urne U2
        X=...
    return X
```

On pourra utiliser les commandes de la librairie `numpy.random` pour simuler les lois usuelles.

- b. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.
- c. Montrer en justifiant soigneusement que pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} \right).$$

Cette formule reste-t-elle valable pour $k = 1$?

2. Établir que X possède une espérance et montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{n^2}{2(n-1)}$.
3. Expliquer pourquoi X et Y suivent la même loi.

Partie 2

Dans cette partie, les tirages n'ont *plus nécessairement lieu dans la même urne* : à chaque étape, on fait un tirage dans l'urne U_1 si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne U_2 si le tirage précédent a donné une boule noire.

4. a. Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?
- b. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-2} \frac{n-1}{n}.$$

Cette formule est-elle encore valable si $k = 1$?

5. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

Partie 3

Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche et dans l'autre urne si ce dernier a donné une boule noire.

6. a. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = 2i + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^i.$$

La formule reste-t-elle valable pour $i = 0$?

- b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_m = \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(Y = k)$.

7. a. Montrer que la suite $(S_{2m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}$.
- b. En déduire que la suite $(S_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite.
- c. En déduire que Y admet une espérance, et préciser $\mathbb{E}(Y)$.
8. Quelle est la loi de X ?

Partie 1

1. a.

```
import numpy.random as rd
def simule(n):
    X=0
    if rd.rand()<1/2: # Tirage dans l'urne U1
        X=rd.geometric((n-1)/n)
    else: # Tirage dans l'urne U2
        X=rd.geometric(1/n)
    return X
```

- b. On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(U, \bar{U})$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}_U(X = 1) \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_{\bar{U}}(X = 1) \mathbb{P}(\bar{U}) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- c. On a $[X = k] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k$ si $k \geq 2$.

On applique encore la formule des probabilités totales au système complet $(U, \bar{U})$. De plus, l'urne étant choisie, les tirages sont indépendants. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}_U(X = k) \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_{\bar{U}}(X = k) \mathbb{P}(\bar{U}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}_U(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}_{\bar{U}}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Pour $k = 1$, cette formule reste valable car $\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1)$.

2. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k \mathbb{P}(X = k)$ converge absolument. Comme cette série est à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est convergente. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(X = k) = \frac{n-1}{2n} \sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^N k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1}.$$

On reconnaît les sommes partielles de deux séries géométriques dérivées, qui sont convergentes car $|\frac{1}{n}| < 1$ et $|\frac{n-1}{n}| < 1$. Donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n-1}{2n} \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^2} + \frac{1}{2n} \frac{1}{(1 - \frac{n-1}{n})^2} = \frac{n^2}{2(n-1)}.$$

3. Les rôles des boules blanches et noires étant symétriques dans la situation décrite dans cette partie, il est évident que Y suivra la même loi que X .

Partie 2

4. a. La situation étant la même pour le premier tirage que dans la Partie 1, on obtient de nouveau $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$.

b. On a $[X = k] = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$ si $k \geq 2$.

On applique encore la formule des probabilités totales au système complet $(U, \overline{U})$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}_U(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_{\overline{U}}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) \mathbb{P}(\overline{U}).$$

Or $\mathbb{P}_U(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n}$: en effet, dans ce cas, tous les tirages ont lieu dans l'urne U . De plus $\mathbb{P}_{\overline{U}}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}$: dans ce cas, seul le premier tirage a lieu dans U_2 , tous les autres tirages ont lieu dans l'urne U_1 . D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Cette formule n'est pas vraie en toute généralité pour $k = 1$ puisque $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$, elle n'est vraie que si $n = 2$.

5. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k \mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente. Comme cette série est à termes positifs, il suffit de montrer qu'elle est convergente. Soit $N \geq 2$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N k \mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X = 1) + \sum_{k=2}^N k \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \sum_{k=2}^N k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\sum_{k=1}^N k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1 \right) \end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée convergente, car $\left|\frac{1}{n}\right| < 1$. Donc X admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} \left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{n^2 - (n-1)^2}{2(n-1)} = \frac{3n-2}{2(n-1)}. \end{aligned}$$

Partie 3

6. a. À nouveau grâce à la formule des probabilités totales, on a pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = 2i + 1) = \mathbb{P}_U(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i}} \cap B_{2i+1}) \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}_{\overline{U}}(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i}} \cap B_{2i+1}) \mathbb{P}(\overline{U}).$$

Or

$$\mathbb{P}_U(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i}} \cap B_{2i+1}) = \underbrace{\frac{n-1}{n}} \underbrace{\frac{1}{n}} \underbrace{\frac{n-1}{n}} \underbrace{\frac{1}{n}} \dots \underbrace{\frac{n-1}{n}} \underbrace{\frac{1}{n}} \underbrace{\frac{1}{n}}$$

puisque l'on change d'urne à chaque tirage. D'où

$$\mathbb{P}_U(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{2i}} \cap B_{2i+1}) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \frac{1}{n}.$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\overline{U}}(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i} \cap B_{2i+1}) &= \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-1}{n} \\ &= \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \frac{n-1}{n}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 2i + 1) &= \mathbb{P}_U(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i} \cap B_{2i+1}) \mathbb{P}(U) + P_{\overline{U}}(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i} \cap B_{2i+1}) \mathbb{P}(\overline{U}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i.\end{aligned}$$

Cette formule reste vraie si $i = 0$ puisque $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$.

b. De façon similaire,

$$\mathbb{P}(Y = 2i) = P_U(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i-1} \cap B_{2i}) \mathbb{P}(U) + P_{\overline{U}}(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i-1} \cap B_{2i}) \mathbb{P}(\overline{U}).$$

Or

$$\mathbb{P}_U(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i-1} \cap B_{2i}) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \dots \frac{n-1}{n} \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-1}{n},$$

puisque l'on change d'urne à chaque tirage. D'où

$$\mathbb{P}_U(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i-1} \cap B_{2i}) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

De même, $\mathbb{P}_{\overline{U}}(\overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{2i-1} \cap B_{2i}) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{1}{n^2}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}$.

7. a. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}S_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} k \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{i=1}^m 2i \mathbb{P}(Y = 2i) + \sum_{i=0}^{m-1} (2i+1) \mathbb{P}(Y = 2i+1) \\ &= \sum_{i=1}^m 2i \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2} + \sum_{i=0}^{m-1} (2i+1) \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i \\ &= \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2} \sum_{i=1}^m i \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} + \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=0}^{m-1} i \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i.\end{aligned}$$

Les séries $\sum i \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^{i-1}$ et $\sum \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^i$ sont des séries géométriques ou géométriques dérivées convergentes, car $\left|\frac{n-1}{n^2}\right| = \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} < 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} &= \frac{n^2 - 2n + 2}{n^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{n-1}{n^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{n-1}{n^2}\right)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{n-1}{n^2}} \\ &= \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}.\end{aligned}$$

b. Soit $m \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2m+1} - S_{2m} = (2m+1) \mathbb{P}(Y = 2m+1) = \frac{2m+1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2}\right)^m.$$

Ainsi, $S_{2m+1} - S_{2m} = \frac{2m+1}{2} e^{m \ln\left(\frac{n-1}{n^2}\right)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées.

Comme la suite (S_{2m}) converge, la suite (S_{2m+1}) converge alors également, vers la même limite.

- c. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la suite (S_m) est convergente, puisqu'elle est à termes positifs. Comme les sous-suites (S_{2m}) et (S_{2m+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite d'après les questions précédentes, on sait que la suite (S_m) converge également vers cette limite.

Finalement, Y admet une espérance, et $\mathbb{E}(Y) = \frac{3n^2}{2(n^2-n+1)}$.

8. Le premier tirage étant identique, on a toujours $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, le protocole de cette partie entraîne que si les $k - 1$ premières boules tirées sont blanches, alors ces tirages ont lieu dans la même urne. Comme on s'intéresse au premier rang où une boule noire est tirée, les tirages se feront toujours dans la même urne, et la situation est la même que dans la partie 1. X suit donc la même loi.