

DS 7 – Concours blanc 2

26.05.2025 – durée : 4h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

★ ★ ★

Exercice 1 – Matrices et endomorphismes nilpotents

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n .

- On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que A^k est la matrice nulle. Si de plus A^{k-1} n'est pas nulle, on dit que k est l'indice de nilpotence de A .
En d'autres termes, l'indice de nilpotence de A est le plus petit entier naturel k tel que A^k est nulle.
- On dit qu'un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^k = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ est l'application nulle. Si de plus φ^{k-1} n'est pas nulle, on dit que k est l'indice de nilpotence de φ .

Les parties 1 à 4 sont indépendantes.

Partie 1 On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ donné par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 2y + z, -2x - 2y - z, x + y) \end{array}$$

1. Soient $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 0, -1)$.
 - a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - b. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}'$.
2. Montrer que A est nilpotente, on précisera son indice de nilpotence. Qu'en déduire de f ?

Partie 2 Dans cette partie, $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

3. Calculer $A^2 - (a + d)A$ en fonction de la matrice identité I_2 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k .
 - a. Justifier que $ad - bc = 0$.
 - b. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $A^n = (a + d)^{n-1}A$.
 - c. En déduire que $a + d = 0$.
5. Déduire de ce qui précède que A est nilpotente si et seulement si $A^2 = 0$.

Partie 3 Dans cette partie, $n = 2$, c'est-à-dire que $\dim E = 2$. On considère $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence 2, c'est-à-dire que $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\varphi \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

6. Montrer que $\text{Im } \varphi \subset \ker \varphi$.
7. En déduire que $\dim \text{Im } \varphi = \dim \ker \varphi = 1$, puis que $\text{Im } \varphi = \ker \varphi$.
8. On considère $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0_E$, où 0_E est le vecteur nul de E . Montrer que $(\varphi(u), u)$ est une base de E .
9. On note $v_1 = \varphi(u)$ et $v_2 = u$. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.

Partie 4

10. Compléter la fonction PYTHON suivante, qui prend en entrée une matrice A nilpotente, et renvoie son indice de nilpotence.

```
import numpy as np
def indice(A):
    M=A
    k=1
    while np.max(abs(M))...
        M=...
        k=...
    return k
```

Exercice 2 – Somme de trois séries

1. Justifier que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergent.

On note

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Montrer que $A - B = 2C$ et $A = C + \frac{1}{4}A$.
3. a. Montrer que, pour tout couple (α, β) de réels, $2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.
b. Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \pi[, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = -\frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

4. On considère deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
- a. Montrer qu'il existe un réel M tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad |f(t)| \leq M \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq M.$$

b. Montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

- c. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

5. Soit φ la fonction définie sur $]0, \pi]$ par

$$\forall t \in]0, \pi], \quad \varphi(t) = \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

- a. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi]$ et déterminer φ' .
b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t)$ et en déduire que φ se prolonge par continuité en 0.

On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

c. Montrer que φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

d. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall t \in [0, \pi[, \quad f(t) = \frac{\pi - t}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On admet que $\forall t \in [0, \pi[, \quad f(t) = \varphi(\pi - t)$. Justifier que la fonction f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

6. a. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $\int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$

b. En déduire, pour tout entier naturel N non nul, que

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{2N+1} (-1)^k (\pi - t) \cos(kt) dt = -2 \sum_{n=0}^N \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

7. a. Montrer que $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

b. En déduire les valeurs de A et B .

Exercice 3 – Trois expériences aléatoires

Dans ce problème, n est un entier fixé tel que $n \geq 2$. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 :

- l'urne U_1 contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires,
- l'urne U_2 contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.

Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule *avec remise* de cette boule dans l'urne dont elle provient, selon *trois protocoles différents* étudiés dans les trois parties du problème.

On note $\star X$ le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire,

$\star Y$ le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche.

On pourra utiliser les événements suivants.

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement "on obtient une boule blanche au i -ème tirage".
- On note U l'événement "le premier tirage a lieu dans l'urne U_1 ".

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1. a. Compléter la fonction `simule(n)` suivante, qui prend en entrée l'entier n et renvoie une simulation de la variable aléatoire X pour l'expérience décrite dans cette partie.

```
import numpy.random as rd
def simule(n):
    X=0
    if ...: # Tirage dans l'urne U1
        X=...
    else: # Tirage dans l'urne U2
        X=...
    return X
```

On pourra utiliser les commandes de la librairie `numpy.random` pour simuler les lois usuelles.

- b. Déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$.
- c. Montrer en justifiant soigneusement que pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{k-1} \right).$$

Cette formule reste-t-elle valable pour $k = 1$?

2. Établir que X possède une espérance et montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{n^2}{2(n-1)}$.
3. Expliquer pourquoi X et Y suivent la même loi.

Partie 2

Dans cette partie, les tirages n'ont *plus nécessairement lieu dans la même urne* : à chaque étape, on fait un tirage dans l'urne U_1 si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne U_2 si le tirage précédent a donné une boule noire.

4. a. Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?
- b. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-2} \frac{n-1}{n}.$$

Cette formule est-elle encore valable si $k = 1$?

5. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

Partie 3

Dans cette partie, chacun des tirages suivant le premier tirage a lieu dans la même urne que le tirage qui le précède si ce dernier a donné une boule blanche et dans l'autre urne si ce dernier a donné une boule noire.

6. a. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = 2i + 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^i.$$

La formule reste-t-elle valable pour $i = 0$?

- b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(Y = 2i) = \left(\frac{n-1}{n^2} \right)^{i-1} \frac{n^2 - 2n + 2}{2n^2}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_m = \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(Y = k)$.

7. a. Montrer que la suite $(S_{2m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge et que $\lim_{m \rightarrow +\infty} S_{2m} = \frac{3n^2}{2(n^2 - n + 1)}$.
- b. En déduire que la suite $(S_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la même limite.
- c. En déduire que Y admet une espérance, et préciser $\mathbb{E}(Y)$.
8. Quelle est la loi de X ?

★ ★
★