DS 8

Corrigé

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}$.
2. On considère l'endomorphisme $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x])$ donné par $f : P\mapsto P+P'$.
   a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}=(1,x,x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

1. – Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$ or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.
   On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc elle converge.
   – On a $\frac{1}{(2n+1)^2}\sim\frac{1}{4n^2}$ or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.
   Par comparaison des termes généraux positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(2n+1)^2}$ converge aussi.
   – Come $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a $\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}\sim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{3/2}}$.
   Par comparaison avec la série de Riemann convergente $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$, on en déduit que la série converge.
2. *a.* Comme $f(1)=1$, $f(x)=x+1$ et $f(x^2)=x^2+2x$, on en déduit
$$A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\text{où}\quad\mathscr{B}=(1,x,x^2).$$
   b. Comme A est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, on sait que A est inversible. Par conséquent, l'endomorphisme f est bijectif.

Exercice 2 – Étude d'un couple de variables aléatoires

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $p\in]0,1[$. On considère des variables aléatoires discrètes N,X définies sur le même univers Ω telles que

⋆ N suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

⋆ pour tous $i,k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}_{[N=k]}(X=i)=\begin{cases}\frac{1}{k+1} & \text{si } i\leqslant k,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on note $p_k=\mathbb{P}(N=k)$.

1. *Cours.* Rappeler la valeur de p_k pour $k\in[\![0,n]\!]$.
2. *a.* Pour tous $i,k\in[\![0,n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}\big([X=i]\cap[N=k]\big)$ à l'aide de p_k.
   On pourra distinguer le cas où $i\leqslant k$ et le cas où $i>k$.
   b. Pour $i\in[\![0,n]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(X=i)=\displaystyle\sum_{k=i}^{n}\frac{p_k}{k+1}$.

3. *a.* Compléter la fonction `simuleX(n,p)` suivante qui prend en entrée n et p, et renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```
import numpy.random as rd
def simuleX(n,p):
    N=...
    X=...
    return(X)
```

b. Compléter la fonction `espX(n,p)` ci-dessous qui prend en entrée n et p, et renvoie une estimation de $\mathbb{E}(X)$.

```
def espX(n,p):
    nsim=1000; S=0
    for i in range(nsim):
        X=...
        S=...
    return(...)
```

4. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ sous la forme d'une somme double, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $p_k = \mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. *a.* Si $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [N = k]) = \mathbb{P}_{[N=k]}(X = i)P(N = k) = \begin{cases} \frac{p_k}{k+1} & \text{si } i \in [\![0, k]\!], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. La famille $\big([N = k]\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements donc par la formule des probabilités totales, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [N = k]) = \sum_{k=i}^{n} \frac{p_k}{k+1}.$$

3. *a.*

```
import numpy.random as rd
def simuleX(n,p):
    N=rd.binomial(n,p)
    X=rd.randint(0,N+1)
    return(X)
```

b.

```
def espX(n,p):
    nsim=1000; S=0
    for i in range(nsim):
        X=simuleX(n,p)
        S=S+X
    return(S/nsim)
```

4. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} i\, \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=0}^{n} i \sum_{k=i}^{n} \frac{p_k}{k+1}.$$

Nous allons inverser l'ordre de sommation dans la double somme, ce qui est bien sûr possible car les sommes sont finies. On obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} i \frac{p_k}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k+1} \sum_{i=0}^{k} i = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{k+1} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} k\, p_k.$$

Ainsi, on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(N=k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(N) = \dfrac{np}{2}$.

Exercice 3 – Optimisation d'une espérance de gain – *d'après Edhec 2022*

Dans cet exercice, x et y désignent des réels strictement positifs.

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.

Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros.

Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.

- On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X.
- On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison.
- On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$.

On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U montrer que :
$$Y_n = \big(xX - (n-X)y\big)\,U + nx\,(1-U).$$
2. *a.* Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$.

   b. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}(XU = k)$.

   c. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(XU)$ sous la forme d'une somme faisant intervenir $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.
3. Déterminer la loi de U, et exprimer son espérance sous la forme d'une somme faisant intervenir $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.
4. Montrer que
$$\mathbb{E}(Y_n) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\mathbb{P}(X=k) + nx.$$
5. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$, et justifier que
$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) < \frac{x}{x+y}.$$

   b. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$? En déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que
$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) < \frac{x}{x+y} & \text{si } n < n_0 \\ \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) \geqslant \frac{x}{x+y} & \text{si } n \geqslant n_0. \end{cases}$$

c. En déduire que le commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille n_0.

6. Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que X suit la loi de Poisson de paramètre a, où a est un réel strictement positif.

   a. Exprimer $\mathbb{P}(X=k+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X=k)$.

   b. Utiliser ce résultat pour compléter la fonction `stock(x,y,a)` en Python, prenant en entrée les valeurs de x, y et a, et renvoyant la valeur de n_0.

```
import numpy as np
def stock(x,y,a):
    k=0; p=np.exp(-a); S=p
    while ...:
        p=...
        k=...
        S=...
    return ...
```

1. Soit $\omega \in \Omega$.
   - Supposons que $U(\omega)=1$. Alors $X(\omega) \leqslant n$ et $Y_n(\omega)=xX(\omega)-y(n-X(\omega))$ (il a vendu $X(\omega)$ unité(s) du produit et il lui en reste $n-X(\omega)$).

     Par conséquent, on a bien $(xX(\omega)-y(n-X(\omega)))U(\omega)+nx(1-U(\omega)) = Y_n(\omega)$.
   - Supposons que $U(\omega)=0$. Alors $X(\omega)>n$ et $Y_n(\omega)=nx$ (il a vendu les n unités). Par conséquent, $Y_n(\omega)=nx$, donc $(x(X(\omega)-y(n-X(\omega)))U(\omega)+nx(1-U(\omega)) = Y_n(\omega)$.

   Finalement : $\forall \omega \in \Omega, Y_n(\omega)=(xX(\omega)-y(n-X(\omega)))U(\omega)+nx(1-U(\omega))$, ce qui donne bien que $Y_n=(xX-(n-X)y)U+nx(1-U)$.

2. *a.* Soit $\omega \in \Omega$.
   - Supposons que $X(\omega) \leqslant n$. Alors $X(\omega) \in [\![0,n]\!]$ et $U(\omega)=1$ donc $(XU)(\omega) \in [\![0,n]\!]$.
   - Supposons que $X(\omega)>n$. Alors $U(\omega)=0$ donc $(XU)(\omega)=0; (XU)(\omega) \in [\![0,n]\!]$.

   Ainsi, la variable aléatoire XU prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$.

   b. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on remarque que l'événement $[XU=k]$ est réalisé si et seulement si l'événement $[X=k]$ l'est. Ainsi, on a $\mathbb{P}(XU=k)=\mathbb{P}(X=k)$.

   c. On a $\mathbb{E}(XU)=\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(XU=k)=\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(XU=k)=\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{n} kP(X=k)$.

3. Comme $U(\Omega)=\{0,1\}$, on a $U \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, où $p=\mathbb{P}(U=1)=\mathbb{P}(X \leqslant n)$. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(U) \;=\; \mathbb{P}(X \leqslant n) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k).$$

4. On a $Y_n=(x+y)XU-n(x+y)U+nx$, donc $\mathbb{E}\left(Y_n\right)=(x+y)\mathbb{E}(XU)-n(x+y)\mathbb{E}(U)+nx$ par linéarité de l'espérance.

   Ainsi $\mathbb{E}\left(Y_n\right)=(x+y)\sum\limits_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)-n(x+y)\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)+nx$, et en factorisant,

$$\mathbb{E}\left(Y_n\right)=(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P(X=k)+nx.$$

5. *a.* On a $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right) = (x+y)\sum\limits_{k=0}^{n+1}(k-n-1)\mathbb{P}(X=k)+(n+1)x$.

Comme le dernier terme de la somme est nul, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right)-\mathbb{E}\left(Y_n\right) &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n-1)\mathbb{P}(X=k)+(n+1)x \\ &\quad -(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\mathbb{P}(X=k)-nx.\end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}\left(Y_{n+1}\right)-\mathbb{E}\left(Y_n\right)=x-(x+y)\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$.

b. Comme $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$.
Ainsi, si on note $S_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(X=k)\geqslant 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
Comme $0<\frac{x}{x+y}<1$, la convergence de $(S_n)_n$ vers 1 assure qu'il existe un entier n tel que $S_n\geqslant\frac{x}{x+y}$.
On note alors n_0 le plus petit de ces entiers, ce qui donne

$$\begin{cases} S_n<\frac{x}{x+y} & \text{si } n<n_0, \\ S_n\geqslant\frac{x}{x+y} & \text{si } n\geqslant n_0, \quad \text{par croissance de } (S_n)_n\end{cases}$$

c. D'après ce qui précède, on a $\mathbb{E}(Y_{n+1})\geqslant\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n<n_0$, donc $\mathbb{E}(Y_{n_0})\geqslant\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n<n_0$.
Par ailleurs, $\mathbb{E}(Y_{n+1})\leqslant\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n>n_0$, donc $\mathbb{E}(Y_{n_0})\geqslant\mathbb{E}(Y_n)$ pout tout $n\geqslant n_0$.
Finalement, on a obtenu que $\mathbb{E}(Y_{n_0})\geqslant\mathbb{E}(Y_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et $\mathbb{E}(Y_n)$ est maximal pour $n=n_0$. Ainsi, le commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain en constituant un stock de taille n_0.

6. *a.* Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X=k+1) = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}e^{-a} = \frac{a}{k+1}\,\frac{a^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-a} = \frac{a}{k+1}\mathbb{P}(X=k).$$

b.
```python
import numpy as np
def stock(x,y,a):
    k=0; p=np.exp(-a); S=p
    while S<x/(x+y):
        p=p*a/(k+1)
        k=k+1
        S=S+p
    return k
```

Exercice 4 – Etude d'une fonction définie par une intégrale – *Ecricome 2009*

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par par la formule suivante

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. **Domaine de définition de f**

   a. Justifier que pour tout réel $a>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\frac{1}{a}$.

   b. Soit $x\geqslant 0$. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**

a. Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
$$x\mathrm{e}^t \leqslant \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^t + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

b. Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}.$$

c. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} |x - f(x)| = 0$, puis que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, donc on donnera l'équation.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**

a. À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :
$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif par :
$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

On pourra remarquer que $f(x)$ se récrit $f(x) = x^2\left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u\right)$, et introduire une primitive de la fonction $g : u \mapsto \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$ sur $]0,+\infty[$.

c. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

On pourra commencer par calculer, $\int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ par intégration par parties, pour $y > 0$ fixé.

d. En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. **Étude locale de f et f' en 0**

a. Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :
$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u,$$
et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

b. À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :
$$f'(x) \underset{x\to0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

c. En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

---

1. *a.* Pour $y > 0$, on a
$$\int_0^y \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\right]_0^y = \frac{1}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-ay}\right) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{a}$$
Donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{a}$.

b. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, l'intégrale considérée est impropre en

$+\infty$. Si $x=0$, la convergence de l'intégrale a été démontrée dans la question 1a. On suppose maintenant $x \neq 0$.

On remarque que $1+x^2\mathrm{e}^{2t} \underset{t\to+\infty}{\sim} x^2\mathrm{e}^{2t}$, donc $\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} x\mathrm{e}^{t}$ car $x>0$.

Ainsi, $\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{t}x \underset{t\to+\infty}{\sim} x\mathrm{e}^{-t}$.

Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. *a.* Soient $x>0$ et $t>0$. Alors $x^2\mathrm{e}^{2t} \leqslant 1+x^2\mathrm{e}^{2t}$, de sorte que $x\mathrm{e}^{t} = \sqrt{x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant \sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}$.

D'autre part, on a $\left(x\mathrm{e}^{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}\right)^2 = x^2\mathrm{e}^{2t} + 1 + \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{4x^2} \geqslant 1 + x^2\mathrm{e}^{2t}$, de sorte que par passage à la racine (les termes de l'inégalité étant positifs), il vient :

$$\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

b. En multipliant les trois termes de l'inégalité précédemment obtenue par e^{-2t}, il vient

$$\forall x>0,\ \forall t \geqslant 0,\quad x\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}} \leqslant x\mathrm{e}^{-t} + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}.$$

Comme les intégrales $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{2x}\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, la croissance de l'intégrale donne

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais en utilisant le résultat de la question 1a, il vient alors

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \frac{1}{6x}$$

c. On a $0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{1}{6x}$, donc par encadrement, $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $|f(x)-x| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, on en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

Rappel : si $f(x)-(ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y=ax+b$ en $+\infty$.

3. *a.* La fonction $t \mapsto x\mathrm{e}^{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathscr{C}^1$, donc le changement de variable est justifié. Notons que l'intégrale définissant f est convergente, donc l'intégrale obtenue après changement de variable l'est encore.

Lorsque $t\to 0$, on a $u\to x$, et lorsque $t\to+\infty$, on a $u\to+\infty$.

Par ailleurs, $u = x\mathrm{e}^{t} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{u}{x}\right)$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\frac{x}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Il vient donc

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_x^{+\infty} \frac{x^2}{u^2}\sqrt{1+u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = x^2\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$$

b. Notons qu'on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - \int_1^{x} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $g : u \mapsto \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$ étant continue sur $[1,x]$, elle admet une primitive G sur cet intervalle. On a alors

$$f(x) \;=\; x^2\left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - G(x) + G(1)\right)$$

On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme produit de telles fonctions : en effet, G a pour dérivée la fonction continue g sur $]0,+\infty[$, donc est de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle.

Par ailleurs, la dérivée de f est donc donnée par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\quad f'(x) \;=\; 2x\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - x^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3} \;=\; \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

c. Soient $x > 0$ et $y > x$. Les fonctions $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ et $u \mapsto -\frac{1}{2u^2}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, y]$, une intégration par parties sur le segment $[x, y]$ donne

$$\int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^2}\right]_x^y + \int_x^y \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} + \int_x^y \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}$$

Lorsque $y \to +\infty$, on a

$$\frac{\sqrt{1+y^2}}{2y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{y^2}}{2y^2} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, $\frac{1}{2u\sqrt{1+u^2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2u^{3/2}}$, donc $\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u$ converge par comparaison à une intégrale de Riemann. Ainsi,

$$\lim_{y\to+\infty} \int_x^y \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}} = \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}.$$

On en déduit que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \lim_{y\to+\infty} \int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2u\sqrt{1+u^2}}$$

Et donc, en multipliant par $2x^2$, on obtient bien $2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

d. On déduit de ce qui précède que $f'(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}$.

La fonction $u \mapsto \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, donc son intégrale sur $[x, +\infty[$ aussi. On en déduit que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

4. *a.* Soient $x > 0$ fixé et $y > x$. Les fonctions $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et $u \mapsto \ln u$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, y]$, donc une intégration par parties sur le segment $[x, y]$ donne

$$\int_x^y \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \left[\frac{\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\right]_x^y + \int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(y)}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^y \frac{u\ln(u)}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u.$$

Lorsque $y \to +\infty$, on a $\frac{\ln(y)}{\sqrt{1+y^2}} \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(y)}{y} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, au voisinage de $+\infty$, on a $u^\alpha \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^\alpha \frac{u\ln u}{u^3} \underset{u\to+\infty}{\sim} u^{\alpha-2}\ln u$.
En particulier, pour $\alpha = 3/2$, on a $u^{3/2}\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right).$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ converge.
Il en est donc de même de $\int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$, de sorte que lorsque $y \to +\infty$,

$$\int_x^y \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u.$$

On déduit donc de ce qui précède que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = \lim_{y\to+\infty} \int_x^y \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u.$$

Montrons la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$. Comme

$$\frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}} \underset{u\to 0^+}{\sim} u\ln u \underset{u\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées, $\int_0^1 \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre en 0 , donc convergente.

Nous avons déjà prouvé la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$, donc ceci conclut.

b. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + x\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \\ &= x\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\right). \end{aligned}$$

Par convergence de l'intégrale, on a $\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$.

Comme $-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x) \to +\infty$, on a $\int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et donc

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}du \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Par conséquent, $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln x$.

De même, en combinant les résultats des questions 3.c et 4.a, on a

$$f(x) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\left(-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}du\right)$$

Mais d'une part, nous savons que le second terme est équivalent à $-\frac{x^2}{2}\ln x$. D'autre part,

$$\sqrt{1+x^2} - 1 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) - 1 = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

de sorte que $\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^2}{4}$.

Or $\frac{x^2}{4} \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(x^2\ln x\right)$, donc on en déduit que $\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(x^2\ln x\right)$.

Ainsi,

$$f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2\ln x}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\ln x\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln x}{2}.$$

4.c. On a, par la question 1.a, $f(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x\ln x}{2} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

D'autre part, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -x\ln x = 0 = f'(0)$.

Donc f' est continue en 0 . Puisque nous avions déjà prouvé que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0,+\infty\,[$, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.