DS 8

13.06.2025 – durée : 3h

Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés. La clarté du raisonnement, la justification de tout résultat, la qualité de la rédaction sont autant de gages de bonne compréhension et compteront pour une part non négligeable dans l'appréciation de la copie.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1 – Questions indépendantes

1. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\sqrt{n+4}}$.
2. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x])$ donné par $f : P \mapsto P + P'$.
   a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
   b. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

Exercice 2 – Étude d'un couple de variables aléatoires

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$. On considère des variables aléatoires discrètes N, X définies sur le même univers Ω telles que

⋆ N suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

⋆ pour tous $i, k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}_{[N=k]}(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } i \leqslant k, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \mathbb{P}(N=k)$.

1. *Cours.* Rappeler la valeur de p_k pour $k \in [\![0,n]\!]$.
2. *a.* Pour tous $i, k \in [\![0,n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}\big([X=i] \cap [N=k]\big)$ à l'aide de p_k.
   On pourra distinguer le cas où $i \leqslant k$ et le cas où $i > k$.
   b. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(X=i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{p_k}{k+1}$.
3. *a.* Compléter la fonction `simuleX(n,p)` suivante qui prend en entrée n et p, et renvoie une simulation de la variable aléatoire X.

```python
import numpy.random as rd
def simuleX(n,p):
    N=...
    X=...
    return(X)
```

   b. Compléter la fonction `espX(n,p)` ci-dessous qui prend en entrée n et p, et renvoie une estimation de $\mathbb{E}(X)$.

```python
def espX(n,p):
    nsim=1000; S=0
```

```
    for i in range(nsim):
        X=...
        S=...
    return(...)
```

4. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ sous la forme d'une somme double, et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3 – Optimisation d'une espérance de gain

Dans cet exercice, x et y désignent des réels strictement positifs.

Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation.

Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros.

Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain.

- On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, notée X.
- On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison.
- On désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$.

On admet que ces variables sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. En distinguant deux cas selon la valeur de U montrer que :

$$Y_n \;=\; \big(xX - (n-X)y\big)\,U + nx\,(1-U).$$

2. *a.* Vérifier que la variable XU prend ses valeurs dans $\{0,\dots,n\}$.

   b. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, déterminer $\mathbb{P}(XU = k)$.

   c. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(XU)$ sous la forme d'une somme faisant intervenir $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$.

3. Déterminer la loi de U, et exprimer son espérance sous la forme d'une somme faisant intervenir $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0,\dots,n\}$.

4. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y_n) \;=\; (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)\mathbb{P}(X=k) + nx.$$

5. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de x, y et $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)$, et justifier que

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) - \mathbb{E}(Y_n) > 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) < \frac{x}{x+y}.$$

b. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)$? En déduire qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)<\frac{x}{x+y} & \text{si } n<n_0\\ \sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\geqslant\frac{x}{x+y} & \text{si } n\geqslant n_0.\end{cases}$$

c. En déduire que le commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain, en constituant un stock de taille n_0.

6. Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que X suit la loi de Poisson de paramètre a, où a est un réel strictement positif.

   a. Exprimer $\mathbb{P}(X=k+1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X=k)$.

   b. Utiliser ce résultat pour compléter la fonction `stock(x,y,a)` en Python, prenant en entrée les valeurs de x, y et a, et renvoyant la valeur de n_0.

```
import numpy as np
def stock(x,y,a):
    k=0; p=np.exp(-a); S=p
    while ...:
        p=...
        k=...
        S=...
    return ...
```

Exercice 4 – Etude d'une fonction définie par une intégrale

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par par la formule suivante

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. **Domaine de définition de f**

   a. Justifier que pour tout réel $a>0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge, et vaut $\frac{1}{a}$.

   b. Soit $x\geqslant 0$. Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

2. **Branche infinie de la courbe représentative de f**

   a. Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :
$$x\mathrm{e}^t\leqslant\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2t}}\leqslant x\mathrm{e}^t+\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2x}.$$

   b. Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$x\leqslant f(x)\leqslant x+\frac{1}{6x}.$$

   c. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}|x-f(x)|=0$, puis que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$, donc on donnera l'équation.

3. **Dérivabilité et monotonie de f**

a. À l'aide du changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

b. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif par :

$$f'(x) = \frac{2f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

On pourra remarquer que $f(x)$ se récrit $f(x) = x^2 \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u \right)$, et introduire une primitive de la fonction $g : u \mapsto \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}$ sur $]0,+\infty[$.

c. Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :

$$2f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

On pourra commencer par calculer, $\int_x^y \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u$ par intégration par parties, pour $y > 0$ fixé.

d. En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. **Étude locale de f et f' en 0**

a. Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln(u)}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u,$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

b. À l'aide des questions précédentes, démontrer alors que l'on a :

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\ln(x) \quad \text{et} \quad f(x) - \frac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{x^2\ln(x)}{2}.$$

c. En déduire que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

⋆ ⋆
⋆