Interrogation de cours – 10

Corrigé

1. Compléter les limites usuelles suivantes :

$$\lim_{x \to \square} \frac{e^x - 1}{x} = \square, \qquad \lim_{x \to \square} \frac{\ln(1+x)}{x} = \square,$$

$$\lim_{x \to \square} \frac{\sin x}{x} = \square, \qquad \lim_{x \to \square} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \square.$$

Voir cours.

2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Voir cours.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 4x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions dans $\mathbb{R}$.

On remarque que $f(-3) = -14$, $f(0) = 1$, $f(1) = -2$ et $f(2) = 1$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc le théorème des valeurs intermédiaires assure que :

- comme $f(-3) < 0$ et $f(0) > 0$, il existe $x_1 \in]-3, 0[$ tel que $f(x_1) = 0$,
- comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, il existe $x_2 \in]0, 1[$ tel que $f(x_2) = 0$,
- comme $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, il existe $x_3 \in]1, 2[$ tel que $f(x_3) = 0$.

4. Montrer que l'équation $e^x + x = 2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

La fonction $f : x \mapsto e^x + x$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, donc elle définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image $f(\mathbb{R})$.
On a $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et 2 admet un unique antécédent par f.

5. La fonction $f : x \mapsto x^x$ admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Pour $x > 0$, $f(x) = e^{x \ln x}$. Comme $x \ln x \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, on a $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi, f admet un prolongement par continuité en 0.