Interrogation de cours – 13

Corrigé

1. Soit E un espace vectoriel.

   a. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel de E.

   b. Donner la définition d'une famille génératrice de E.

   c. Donner la définition d'une famille libre de E.

   d. Donner la définition d'une base de E.

   e. Vrai ou Faux : si F et G sont des sev de E, alors $F \cap G$ est un sev de E.

   Voir cours.

2. Déterminer une famille génératrice du sev $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est-elle une base de F ?

   On peut récrire F sous la forme

$$\begin{aligned} F = \{(x, y, -x-y),\ x, y \in \mathbb{R}\} &= \{x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, -1),\ x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 0, -1),\ (0, 1, -1)). \end{aligned}$$

   Ainsi, F est un bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Comme les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$ et $u_2 = (0, 1, -1)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre. On a vu par ailleurs que la famille (u_1, u_2) est génératrice de F, c'est donc une base de F.

3. *a.* La famille $(x^4, x^3 + x + 1, x + 1)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[x]$?

   b. La famille $((2, 1, 3),\ (5, 4, 0),\ (-1, 0, -4))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^3$?

   a. La famille est échelonnée en degré, c'est donc une famille libre de $\mathbb{R}[x]$.

   b. On cherche a, b, c tels que $a\,(2, 1, 3) + b\,(5, 4, 0) + c\,(-1, 0, -4) = (0, 0, 0)$. On se ramène à la résolution du système suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} 2a + 5b - c &= 0 \\ a + 4b &= 0 \\ 3a - 4c &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2a + 5b - c &= 0 \\ a + 4b &= 0 \\ -5a - 20b &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 2a + 5b - c &= 0 \\ a + 4b &= 0 \end{aligned} \right.$$

   Il y a une infinité de solutions, donc la famille est liée.

   On pouvait aussi se ramener à l'étude de la liberté d'une famille échelonnée par opérations type pivot de Gauss sur la famille.