

Interrogation de cours – 14

Corrigé

Soient E un espace vectoriel de dimension n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille de E . Compléter les affirmations suivantes.

- a. Une famille libre de E a au plus n vecteurs.
- b. Une famille génératrice de E a au moins n vecteurs.
- c. $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = k$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est libre.
- d. $\text{rg}(u_1, \dots, u_k) = n$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_k)$ est génératrice.

2. Donner la définition de la somme $F + G$.

On a $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.

3. On suppose que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ et $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_m)$. Donner une famille génératrice de $F + G$.

On a $F + G = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$. Autrement dit, $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$ est une famille génératrice de $F + G$.

4. Que signifie que F et G sont en somme directe ?

Les sev F et G sont en somme directe si tout vecteur w de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $w = u + v$, où $u \in F$ et $v \in G$.

5. Que veut dire que F et G sont supplémentaires ?

Ceci signifie que $E = F + G$, et la somme $F + G$ est directe. En d'autres termes, tout vecteur de E s'écrit de manière unique sous la forme $u + v$, où $u \in F$ et $v \in G$.

6. Si $\mathcal{B}$ est une base de F et $\mathcal{B}'$ une base de G ,

- a. La somme $F + G$ est directe ssi la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est libre.
- b. F et G sont supplémentaires ssi la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E .