Interrogation de cours – 15

Corrigé

1. Donner le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

2. Donner le développement limité de $\sin x$ au voisinage de 0 à l'ordre 7.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7).$$

3. Donner le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3). \end{aligned}$$

4. Donner le développement limité de $\frac{\ln(1+x)}{1-x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) (1+x+x^2+o(x^2)) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + o(x^3).$$

5. Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $u_n = e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}$.

On a $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$, donc on obtient avec $u = \frac{2}{n}$:

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.