Interrogation de cours – 2

Corrigé

1. Écrire la négation des propositions suivantes.

   a. "$\exists x \in \mathbb{R},\ e^x \leqslant 0$".
   b. "$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y$".
   c. "$\forall x \in \mathbb{R},\ (x > 1 \Rightarrow e^x > 0)$".

   a. "$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$".
   b. "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$".
   c. "$\exists x \in \mathbb{R},\ (x > 1$ et $e^x \leqslant 0)$".

2. On note f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs.

   a. "La fonction f s'annule en au moins un point".
   b. "La fonction f est la fonction nulle".
   c. "La fonction f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$".

   a. "$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$".
   b. "$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$".
   c. "$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leqslant f(x)$.

3. Rédiger proprement la preuve de : " $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ est pair $\Rightarrow n$ est pair ".

   Soit $n \in \mathbb{R}$, montrons n^2 est pair $\Rightarrow n$ est pair par contraposée, c'est-à-dire montrons l'implication "n est impair $\Rightarrow n^2$ est impair".
   Supposons que n est impair, il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Par conséquent,

   $$n^2 \;=\; (2k+1)^2 \;=\; 4k^2+4k+1 \;=\; 2(2k^2+2k)+1$$

   ce qui entraîne que n^2 est impair. On a donc bien montré l'implication souhaitée.

4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant

   $$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2. \end{cases}$$

   En rédigeant proprement un raisonnement par récurrence, montrer "$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2\times 3^n - 1$".

   Nous allons montrer par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par "$u_n = 2\times 3^n - 1$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   – *Initialisation.* On a $2\times 3^0 - 1 = 1 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   – *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2\times 3^{n+1} - 1$. On a

   $$u_{n+1} \;=\; 3u_n + 2 \;=\; 3\,(2\times 3^n - 1) + 2 \;=\; 2\times 3^{n+1} - 1.$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc bien montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n - 1$.