

Interrogation de cours – 3

Corrigé

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Mettre sous la forme d'une seule fraction l'expression suivante, qu'on exprimera sous la forme la plus simple possible :

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

On a $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.$

2. Écrire les trois expressions suivantes sous la forme $2^n \times 3^m$, où n et m sont des entiers relatifs :

$a. \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}}. \quad b. \frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}}. \quad c. \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}.$

$a. \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}} = \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 2^{-1} \times 3^{-1}} = 2^{3-8-(-1)} \times 3^{2-4-(-1)} = 2^{-4} \times 3^{-1}.$
 $b. \frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \times (-1)^{32} \times 2^{32}}{(-1)^{-10} \times 3^{-10} \times 2^{-6}} = 3^{16-(-10)} \times 2^{32-(-6)} = 3^{26} \times 2^{38}.$
 $c. \frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{3^{21}(3+1)}{3^{21}(3-1)} = \frac{4}{2} = 2.$

3. Donner une expression du polynôme $x^3 - 2^3$ sous la forme d'un produit d'un polynôme de degré 1, et d'un polynôme de degré 2.

D'après la formule de Bernoulli, $x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4).$

4. Factoriser entièrement le polynôme $x^4 - 1$, c'est-à-dire l'exprimer comme un produit de polynômes qu'on ne peut pas factoriser davantage.

On a $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$ On ne peut pas factoriser davantage, car le polynôme $x^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}.$