

Interrogation de cours – 4

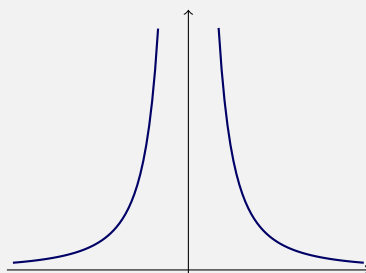
Corrigé

1. Soient f une fonction réelle et E, F des ensembles de $\mathbb{R}$. Écrire sous la forme d'une proposition avec des quantificateurs la proposition " f est bijective de E sur F ".

$$"\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y".$$

2. Donner la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$, et tracer l'allure de son graphe.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$.



Graphe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Que désigne la notation x^a ? Donner la dérivée de la fonction $f_a : x \mapsto x^a$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel x^a est défini par $x^a = e^{a \ln x}$. La dérivée de la fonction f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'_a(x) = ax^{a-1}.$$

4. Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$, sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : x \mapsto x^x$ se réécrit $f : x \mapsto e^{x \ln x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, car $x \mapsto x \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x} = (\ln x + 1) x^x.$$

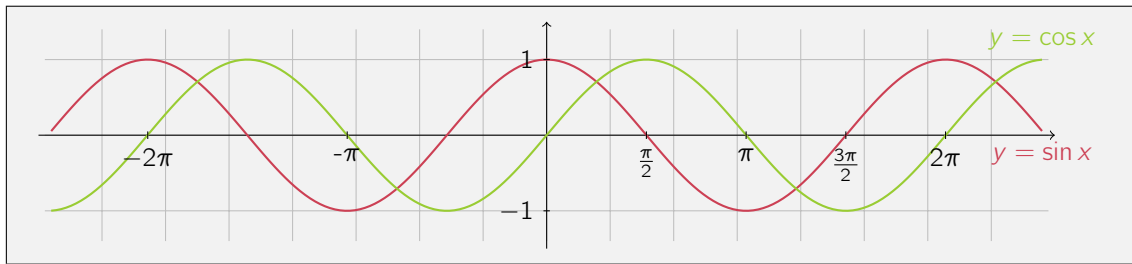
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$ à l'aide de $\cos a$, $\cos b$, $\sin a$ et $\sin b$.

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a. \end{aligned}$$

6. Préciser les valeurs de $\cos 0$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \pi$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \pi$.

$$\text{On a } \cos 0 = 1, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \pi = -1, \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ et } \sin \pi = 0.$$

7. Tracer sur un même graphique la courbe de la fonction $\cos$ et celle de la fonction $\sin$.



8. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_{\tan}$ de la fonction $\tan$, et préciser sa dérivée sur $\mathcal{D}_{\tan}$.

On a $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Par ailleurs,

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$