Interrogation de cours – 5

Corrigé

1. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, puis $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour $p \in [\![0, n]\!]$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{n} q^k = \begin{cases} n-p+1 & \text{si } q = 1 \\ q^p\,\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Soient $a_0, \dots, a_{n+1}$ des réels, et $p \in [\![1, n]\!]$. Exprimer

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k), \quad \text{puis} \quad \sum_{k=p}^{n} (a_{k-1} - a_k).$$

$$\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} (a_{k-1} - a_k) = a_{p-1} - a_n.$$

4. Énoncer l'inégalité triangulaire avec le signe $\sum$.

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$.