Interrogation de cours – 6

Corrigé

Dans tout ce qui suit, n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire si les opérations suivantes sont possibles, et donner leur résultat le cas échéant : $A+B$, $B+C$, AC, BA, DA.

> L'opération $A+B$ n'est pas possible car les matrices n'ont pas la même taille. L'opération BA est impossible car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A. On a par ailleurs :
>
> $$B+C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = AB$. Combien de lignes et de colonnes la matrice C possède-t-elle ?

Donner l'expression sous la forme d'une somme du coefficient $c_{i,j}$ se trouvant à la ligne i et à la colonne j de la matrice $C = AB$.

> La matrice $C = AB$ a n lignes et q colonnes. Par ailleurs, si $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on a
>
> $$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, déterminer ${}^tA$.

> On a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, donner l'expression de ${}^t(AB)$ en fonction de ${}^tA$ et ${}^tB$.

> On a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

5. Donner la définition d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si ${}^tA = A$. Autrement dit, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} = a_{j,i}$.

6. Calculer $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. A-t-on $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$?

On a $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc ${}^tA = -A$, et on a bien $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.