Interrogation de cours – 7

Corrigé

On considère deux ensembles E et F, et une application $f : E \to F$.

1. Donner la définition de l'injectivité de f. On donnera la définition sous la forme d'une phrase, puis d'une proposition quantifiée.

> L'application f est injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f. En d'autres termes,
> $$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \ \to\ x = y.$$

2. Donner la définition de la surjectivité de f. On donnera la définition sous la forme d'une phrase, puis d'une proposition quantifiée.

> L'application f est surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f. En d'autres termes,
> $$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x).$$

3. Donner la définition de la bijectivité de f. On donnera la définition sous la forme d'une phrase, puis d'une proposition quantifiée.

> L'application f est bijective si tout élément de F a exactement un antécédent par f. En d'autres termes,
> $$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x).$$

4. L'application $\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier.

> L'application cos n'est pas injective : on par exemple $\cos 0 = \cos(2\pi) = 1$, donc 1 a strictement plus d'un antécédent (il y en a même une infinité).
>
> L'application cos est surjective : on sait que cos est décroissante sur $[0, \pi]$, continue et $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$. Par conséquent, son ensemble image est $[-1, 1]$.

5. Tracer un exemple de graphe d'une application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ surjective, mais pas injective, et un exemple de graphe d'une application $g : [0, 1] \to [0, 1]$ injective, mais pas surjective.