Interrogation de cours – 8

Corrigé

1. Énoncer la formule de Pascal.

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On a
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

2. Donner l'expression du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ pour des entiers k, n tels que $k \leqslant n$.

On a $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

3. Énoncer la formule du capitaine.

Si $n, k \in \mathbb{N}^\star$, alors $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

4. Énoncer la formule du binôme de Newton.

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-5)^k$.

Par la formule du binôme de Newton, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-5)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-5)^k 1^{n-k} = (-5+1)^n = (-4)^n.$$

6. *a.* Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. Que vaut B^k si $k \geqslant 2$?

b. Soit $A = B + I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n en utilisant la formule du binôme de Newton, dont on justifiera l'utilisation.

a. On a $B^2 = 0_3$. Ceci entraîne que si $k \geqslant 2$, alors $B^k = B^{k-2}B^2 = 0_3$.

b. Comme B et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :
$$A^n = (B+I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$