Interrogation de cours – 9

Corrigé

1. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x + z = 2 \\ -3x + y - z = -1 \end{cases}$$

En notant (S) le système ci-dessus, on a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -8 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 4y + 5z = 14 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -2y - 3z = -8 \\ -z = -2 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Le système a donc une unique solution, donnée par $(0, 1, 2)$.

2. Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

La matrice du système est-elle inversible ?

En notant (S) le système ci-dessus, on a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 3z = 0 & {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ 3y + 9z = 0 & {\scriptstyle L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - z = 0 \\ \boxed{y} + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} = z \\ \boxed{y} = -3z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(z, -3z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \{z\,(1, -3, 1),\ z \in \mathbb{R}\}$.

3. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Justifier.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

- La matrice A n'est pas inversible : ses deux premières colonnes sont proportionnelles (on peut aussi voir que sa première et sa dernière ligne le sont).
- Par opérations élémentaires, on obtient que

$$B \in GL_3(\mathbb{R}) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Or cette dernière matrice n'est pas inversible car ses deux dernières lignes sont proportionnelles. On en déduit donc que B n'est pas inversible.

On aurait aussi pu terminer l'algorithme du pivot de Gauss, pour obtenir une matrice triangulaire dont la dernière ligne est nulle, ce qui mène bien sûr à la même conclusion.