1. Logique et raisonnements

Logique

Exercice 1. Écrire la proposition “La nuit, tous les chats sont gris” sous la forme d'une implication. Exprimer simplement sa négation, sa contraposée et sa réciproque.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter les propositions avec $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ pour obtenir des propositions vraies.

1. $x = 5 \quad \ldots \quad x^2 = 25$.
2. $\mathrm{e}^x \geqslant 1 \quad \ldots \quad x \geqslant 0$.
3. $x(x+2) = x(2x+3) \quad \ldots \quad x = -1$.
4. $\ln(x^4) = 16 \quad \ldots \quad \ln(x) = 4$.

Exercice 3. Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes puis dire lesquelles sont vraies.

1. Le carré de tout nombre réel est positif ou nul.
2. Certains nombres réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Il y a au moins un nombre réel supérieur à tous les autres.
4. Entre deux nombres réels distincts, il y a toujours un nombre entier.

Exercice 4. On note A une partie de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes, puis exprimer leur négation.

1. A n'est pas majorée.
2. A est bornée.
3. f est strictement décroissante.
4. f admet un minimum global.

Exercice 5. On désigne par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels. Exprimer avec une phrase simple chacune des propositions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists a \in \mathbb{N},\ x_n = a$.
2. $\exists a \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = a$.
3. $\forall a \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x_n = a$.
4. $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ x_n \neq x_m$.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ x_n = x_m \Rightarrow n = m$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, donner des exemples de fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ telles que la proposition soit vérifiée.

On s'efforcera de proposer les exemples les plus généraux possibles. On pourra se contenter de tracer les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3.

1. $\exists i \in \{1,2,3\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_i(x) = 2$.
2. $\forall i \in \{1,2,3\},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f_i(x) = 2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists i \in \{1,2,3\},\ f_i(x) = 2$.
4. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1,2,3\},\ f_i(x) = 2$.

Raisonnements

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer en raisonnant par contraposée que l'implication $(\forall\, \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow (x = 0)$ est vraie.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de montrer que $\sqrt{3}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Supposons pour cela qu'il existe deux entiers naturels p et q, avec q non nul, tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$. On les suppose de plus choisis de telle sorte que la fraction soit irréductible.

1. Justifier que p^2 est divisible par 3, puis montrer que p est divisible par 3.
2. Montrer que q est divisible par 3 également.
3. Conclure.

Exercice 10. Soient $n_1, n_2, \ldots, n_9$ des entiers naturels vérifiant $n_1 + \ldots + n_9 = 90$. Montrer par l'absurde qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 13. Montrer que la proposition $\left(\forall n \in \mathbb{N},\, 2^n \geqslant n^2\right)$ est fausse. Prouver en revanche : $\forall n \geqslant 4,\, 2^n \geqslant n^2$.

Exercice 14. Nous cherchons à montrer par récurrence que tous les lapins du monde sont de la même couleur.

> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la proposition : "tout groupe de n lapins est composé de lapins de la même couleur".
>
> *Initilisation :* $P(1)$ est vraie.
>
> *Hérédité :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie.
> On considère un groupe de $n+1$ lapins numérotés de 1 à $n+1$. Les n premiers lapins de 1 à n sont de la même couleur d'après $P(n)$. De même, les n derniers de 2 à $n+1$ sont de la même couleur. Par conséquent, ces $n+1$ lapins sont de la même couleur, et $P(n+1)$ est vraie.
>
> *Conclusion :* Tous les lapins du monde sont de la même couleur.

Que penser de cette preuve ?

Exercice 15. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n}. \end{cases}$$

Expliciter la suite (u_n).

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2^n$.

Exercice 17. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+6} = \dfrac{3}{2}x + 1$.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.

Exercice 20.

1. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction s'annulant en 3.
2. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 21. Cherchons, par analyse-synthèse toutes les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y.$$

1. Analyse : on suppose que f est une fonction qui vérifie cette propriété.
   a. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
   b. Montrer qu'on a en fait $f(0) = 1$.
   c. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Synthèse : conclure.