

10. Limites et continuité

Exercice 1. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites aux points précisés.

$$\begin{array}{ll}
 f_1(x) = \frac{x^7 + x^2 - x}{x^6 + 4} & x \rightarrow -\infty \\
 f_3(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) & \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \\
 f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x & x \rightarrow -\infty \\
 f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} & x \rightarrow -1^+ \\
 f_9(x) = \frac{1 + x^2}{\sin^2 x} & x \rightarrow 0 \\
 f_{11}(x) = \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} & x \rightarrow 1 \\
 f_{13}(x) = \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \rightarrow 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ll}
 f_2(x) = \frac{e^x + x^2 + x + 1}{e^{2x} + 1} & \begin{array}{l} x \rightarrow -\infty, \\ x \rightarrow +\infty \end{array} \\
 f_4(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} & \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, \\ x \rightarrow 0^+ \end{array} \\
 f_6(x) = \sqrt{x} \lfloor \ln x \rfloor & x \rightarrow 0^+ \\
 f_8(x) = \frac{x^3 + 8}{|x + 2|} & x \rightarrow -2^+ \\
 f_{10}(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2 + 1} & x \rightarrow +\infty \\
 f_{12}(x) = \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)} & x \rightarrow 0
 \end{array}$$

Exercice 2.

- En utilisant les suites $(2n\pi)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2n\pi + \frac{\pi}{2})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $f : x \mapsto \frac{x^2 \sin x}{x^2 + 1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- En utilisant les suites $(\frac{1}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{1}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que $g : x \mapsto \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition.

$$\begin{array}{ll}
 1. f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases} & 3. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\
 2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{3\} \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases} & 4. f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4} & \text{si } x \neq \pi/4 \\ \sqrt{2} & \text{sinon} \end{cases}
 \end{array}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Exercice 4. Etudier la continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 5. Etudier la continuité en 1 de la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Préciser si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition.

$$\begin{array}{ll}
 a. f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & e. f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right). \\
 b. f : x \mapsto \frac{x}{2x + |x|} & f. f : x \mapsto \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1). \\
 c. f : x \mapsto x^x & g. f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x} - 1}. \\
 d. f : x \mapsto x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & h. f : x \mapsto x \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x}\right).
 \end{array}$$

Exercice 7. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Montrer que l'équation $e^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 10. Un coureur parcourt 12 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$.
2. Montrer que pour tout $y \in] -1, 1[$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}$.

Exercice 13. Soit $n \geq 2$ un entier. On considère la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \llbracket 1, n \rrbracket$ par

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k}.$$

Le but de cet exercice est de compter les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1. En étudiant le signe de $f(x)$ pour $x \in] -\infty, 1[$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur l'intervalle $]n, +\infty[$.
3. Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]i, i + 1[$ et déterminer les limites de f aux bornes de cet intervalle.
4. Conclure.

Exercice 14. On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n réels distincts $a_1, a_2, \dots, a_n$, tous éléments de $[0, 1]$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par : $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x - a_k|$.

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe au moins un réel u dans $[0, 1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la limite de cette suite.

Exercice 16. Soit $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, déterminer sa limite.

Exercice 17. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

On dit que f est k -contractante.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0, 1]$ que l'on notera c .
2. On considère une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} c_0 \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = f(c_n) \end{cases}$$

- a. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
- b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
- c. En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction f et on pose $f(1) = a$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer par montrer l'égalité pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} a$.
5. On admet que tout réel est limite d'une suite de nombre rationnels. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xa$.
6. Conclure.