10. Limites et continuité

Exercice 1. Calculer, lorsqu'elles existent, les limites aux points précisés.

$f_1(x) = \dfrac{x^7+x^2-x}{x^6+4}$	$x \to -\infty$	$f_2(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+x^2+x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$	$x \to -\infty$, $x \to +\infty$
$f_3(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$	$x \to +\infty$, $x \to 0^+$	$f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x^2}$	$x \to +\infty$, $x \to 0^+$
$f_5(x) = \sqrt{x^2+1}+x$	$x \to -\infty$	$f_6(x) = \sqrt{x}\lfloor \ln x \rfloor$	$x \to 0^+$
$f_7(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$	$x \to -1^+$	$f_8(x) = \dfrac{x^3+8}{\lvert x+2\rvert}$	$x \to -2^+$
$f_9(x) = \dfrac{1+x^2}{\sin^2 x}$	$x \to 0$	$f_{10}(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$	$x \to +\infty$
$f_{11}(x) = \dfrac{x^5-1}{x^3-1}$	$x \to 1$	$f_{12}(x) = \dfrac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$	$x \to 0$
$f_{13}(x) = \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$x \to 0$		

Exercice 2.

1. En utilisant les suites $(2n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \sin x}{x^2+1}$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. En utilisant les suites $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, montrer que $g : x \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition.

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+\backslash\{3\} \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases}$
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin(x)}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x - \cos x}{x-\pi/4} & \text{si } x \neq \pi/4 \\ \sqrt{2} & \text{sinon} \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x} & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

Exercice 4. Etudier la continuité en 0 de la fonction $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.

Exercice 5. Etudier la continuité en 1 de la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lvert x-1\rvert}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$.

Exercice 6. Étudier la continuité des fonctions suivantes. Préciser si elles admettent un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition.

a. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x+\lvert x\rvert}$.

c. $f : x \mapsto x^x$.

d. $f : x \mapsto x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

e. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

f. $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1)$.

g. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}-1}$.

h. $f : x \mapsto x \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$.

Exercice 7. Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet trois solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 10. Un coureur parcourt 12 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.
2. Montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.

Exercice 13. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère la fonction f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash[\![1,n]\!]$ par

$$f \,:\, x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}.$$

Le but de cet exercice est de compter les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

1. En étudiant le signe de $f(x)$ pour $x \in]-\infty,1[$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur l'intervalle $]-\infty,1[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur l'intervalle $]n,+\infty[$.
3. Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]i,i+1[$ et déterminer les limites de f aux bornes de cet intervalle.
4. Conclure.

La fonction f est définie sur l'ensemble

$$\mathbb{R}\backslash[\![1,n]\!] \ =]-\infty,1[\cup]1,2[\cup\ldots\cup]n-1,n[\cup]n,+\infty[.$$

1. Soit $x \in]-\infty,1[$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$x < 1 \leqslant k \text{ donc } x-k < 0 \text{ et } \frac{1}{x-k} < 0.$$

Par somme de termes strictement négatifs, on en déduit que $f(x) < 0$. L'équation $f(x) = 0$ n'a donc aucune solution sur $]-\infty,1[$.

2. Raisonnement similaire : si $x \in]n,+\infty[$, alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$x > n \geqslant k \text{ donc } x-k > 0 \text{ et } \frac{1}{x-k} > 0.$$

Par somme de termes strictement positifs, on en déduit que $f(x) > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $]-\infty,1[$.

3. La fonction f est dérivable sur $]i,i+1[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]i,i+1[$,

$$f'(x) \ = \ \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

Comme $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]i,i+1[$, on en déduit que f est strictement décroissante sur cet intervalle.
N.B. : on pouvait aussi remarquer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-k}$ est strictement décroissante sur $]i,i+1[$, donc f est strictement décroissante sur $]i,i+1[$ comme somme de fonctions strictement décroissantes sur cet intervalle.
Soit $x \in]i,i+1[$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x-i} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x-k}$$

En passant à la limite lorsque $x \to i^+$, il vient

$$\lim_{x\to i^+} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x-k} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{i-k} \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to i^+} \frac{1}{x-i} = +\infty.$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to i^+} f(x) = +\infty$. De même,

$$\lim_{x\to(i+1)^-} \sum_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{n} \frac{1}{x-k} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i+1}}^{n} \frac{1}{i+1-k} \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x\to(i+1)^-} \frac{1}{x-(i+1)} = -\infty.$$

Par somme, $\lim\limits_{x\to(i+1)^-} f(x) = -\infty$.

4. Soit $i \in [\![1,n-1]\!]$. D'après la question précédente, la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]i,i+1[$, donc elle réalise une bijection de $]i,i+1[$ dans $f\big(]i,i+1[\big) =]\lim\limits_{(i+1)^-} f, \lim\limits_{i^+} f[= \mathbb{R}$.
Ainsi, $0 \in f(]i,i+1[)$, et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution l'intervalle $]i,i+1[$.
Finalement, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur chacun des intervalles $]i,i+1[$ pour $i \in [\![1,n-1]\!]$, et n'admet pas de solution sur $]-\infty,1[\cup]n,+\infty[$. Il y a donc exactement $n-1$ solutions.

Exercice 14. On désigne par n un entier naturel non nul et on considère n réels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tous éléments de $[0,1]$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par : $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$ et en déduire qu'il existe au moins un réel u dans $[0,1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et la limite de cette suite.

Exercice 16. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, déterminer sa limite.

Exercice 17. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

On dit que f est $k-$contractante.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0,1]$ que l'on notera c.
2. On considère une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} c_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = f(c_n) \end{cases}$$

   a. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leqslant k^n |c_0 - c|$.
   c. En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

On considère une telle fonction f et on pose $f(1) = a$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. On pourra commencer par montrer l'égalité pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que : $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\, a$.
5. On admet que tout réel est limite d'une suite de nombre rationnels. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xa$.
6. Conclure.