

11. Variables aléatoires finies

Exercice 1. On lance deux dés équilibrés, et on note X la variable aléatoire désignant le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X .

On a $X(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

1ère méthode : on remarque que pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(\{(1, k), (k, 1), (2, k), (k, 2), \dots, (k-1, k), (k, k-1), (k, k)\}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(\{(i, k), (k, i)\}) + \mathbb{P}(\{(k, k)\}) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2k-1}{36}\end{aligned}$$

car il y a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = \{(i, j), i, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.

2ème méthode : on remarque que pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \frac{\text{Card}\{(i, j), i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket\}}{\text{Card } \Omega} = \frac{k^2}{36}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \frac{1}{36}$, et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k-1)^2}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

Exercice 2. Soit X une v.a. telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2), \quad \mathbb{P}(X < 3) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X > 3) = \frac{1}{4}.$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X .

3. Donner la loi des variables aléatoires $Y = X^2 - 3X + 1$ et $Z = \min(X, 2)$.

Exercice 3. Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches. On tire successivement et sans remise toutes les boules. On note X_n le rang d'apparition de la première boule rouge. Déterminer la loi de X_n puis en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.

On remarque d'abord que $X_n(\Omega) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note R_i l'événement "le i -ème tirage donne une boule rouge". On a alors pour tout $k \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1} \cap R_k) = \mathbb{P}(\bar{R}_1) \mathbb{P}(\bar{R}_2) \dots \mathbb{P}(\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{k-1} | R_k)$$

par la formule des probabilités composées. Pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a par ailleurs :

$$\mathbb{P}_{\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{i-1}}(\bar{R}_i) = \frac{n-i-1}{n-i+1}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{i-1}}(R_i) = \frac{2}{n-i+1}$$

car si $\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{i-1}$ est réalisé, l'urne contient exactement 2 boules rouges et $n-2-(i-1) = n-i+1$ boules blanches. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n-2}{n} \frac{n-3}{n-1} \dots \frac{n-k}{n-k+2} \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

N.B : on a bien

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k = 1.$$

Calculons l'espérance de X_n : on a

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{2}{n-1} \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = n - \frac{2(2n-1)}{6}$$

Finalement, $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n+1}{3}$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$, et

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

1. Déterminer la loi de $Y = e^X$ et de $Z = X^2$.

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice 5. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(X = e) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(X = e^2) = \frac{1}{5}.$$

On pose $Y = \ln X$.

1. Calculer l'espérance de Y .
2. Montrer que $\frac{1+3e+e^2}{5} \neq e$ et en déduire que $\ln(\mathbb{E}(X)) \neq \mathbb{E}(\ln X)$.

Exercice 6. On pioche deux boules simultanément dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la variable aléatoire donnant la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de X puis calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 7. Soient N boules numérotées de 1 à N dans une urne. On effectue n tirages indépendants dans l'urne de manière équiprobable avec remise, et on note Y_i le numéro de la i -ème boule tirée pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note par ailleurs X_n le plus grand numéro obtenu.

1. Donner, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi de Y_i .
2. Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer l'événement $[X_n \leq k]$ à l'aide des événements $[Y_i \leq k]$, où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
3. En déduire, $\mathbb{P}(X_n \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
4. Déterminer la loi de X_n .
5. Lorsque N est fixé, que vaut la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$? et celle de $\mathbb{V}(X_n)$?

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle finie. Déterminer le réel a tel que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : a \mapsto \mathbb{E}((X - a)^2)$$

soit minimale. Quelle est la valeur de ce minimum?

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{E}(X) = 5$. Déterminer n .
2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ telle que $\mathbb{E}(X) = \sigma(X) = \frac{3}{4}$. Déterminer n et p .

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de la variable aléatoire X , puis donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

1. Sur la liste électorale d'une ville, il y a 54% de femmes. On choisit au hasard un nom de la liste et on considère la variable aléatoire X qui vaut 1 s'il s'agit d'une femme, 0 sinon.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On choisit au hasard un animal de cet enclos, et on note X la variable aléatoire désignant le nombre de bosses de l'animal.
3. On choisit au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules rouges et 4 boules noires. On considère la variable aléatoire X qui vaut 1 s'il s'agit d'une boule rouge, 0 sinon.
4. On lance 20 fois un dé cubique équilibré. On note X la variable aléatoire qui désigne le nombre de fois où on obtient un nombre supérieur ou égal à 5.
5. Un sac contient 26 jetons sur lesquels figurent les 26 lettres de l'alphabet. On tire au hasard un jeton du sac, on note la lettre obtenue et on le remet dans le sac. On recommence 5 fois le procédé, et on forme ainsi un mot de 5 lettres. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de voyelles dans ce mot.
6. On considère 128 boules numérotées de 1 à 128. On en tire au hasard 10 parmi les 128, puis on en tire une au hasard parmi les 10. On note X la variable aléatoire désignant le numéro de la boule obtenue.

Exercice 12. Pour tout événement A , on définit la variable aléatoire, appelée indicatrice de A ,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. Soit A un événement. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_A$. En déduire son espérance.
2. Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A) \mathbb{E}(\mathbb{1}_B)$.

Exercice 13.

1. Soit X une v.a. finie. On définit la fonction G_X par $G_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction G_X s'appelle la fonction génératrice de X .
 - a. Que vaut $G_X(0)$? Montrer que $G'_X(0) = \mathbb{E}(X)$, et $G''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$.
 - b. Calculer G_X lorsque X suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
 - c. Calculer G_X lorsque X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Retrouver alors l'expression de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. Un tireur doit toucher $n \in \mathbb{N}^*$ cibles numérotées de 1 à n dans l'ordre et il s'arrête dès qu'il rate une cible. On suppose que s'il se présente devant la k -ième cible, la probabilité qu'il la touche est $p \in]0, 1[$. On note X le nombre de cibles touchées.
 - a. Déterminer la loi de X .
 - b. En utilisant la fonction génératrice associée à X , calculer $\mathbb{E}(X)$ puis la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

1. a. On a $G_X(0) = \mathbb{E}(1) = 1$. Par ailleurs, si on note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, le théorème de transfert donne que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=1}^n e^{tx_k} \mathbb{P}(X = x_k).$$

La fonction G_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^n x_k e^{tx_k} \mathbb{P}(X = x_k), \text{ donc } G'_X(0) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X).$$

La fonction G'_X est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G''_X(t) = \sum_{k=1}^n x_k^2 e^{tx_k} \mathbb{P}(X = x_k), \text{ donc } G''_X(0) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{E}(X^2),$$

en appliquant à nouveau le théorème de transfert.

- b. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ pour tout $k \in X(\Omega)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^n e^{tk} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (e^t)^k = \frac{e^t}{n} \frac{1 - e^{nt}}{1 - e^t}.$$

- c. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, et $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in X(\Omega)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + 1 - p)^n,$$

par la formule du binôme de Newton. Par conséquent, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$G'_X(t) = np e^t (pe^t + 1 - p)^{n-1}, \text{ donc } \mathbb{E}(X) = G'_X(0) = np.$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G''_X(t) &= np \left(e^t (pe^t + 1 - p)^{n-1} + (n-1) pe^{2t} (pe^t + 1 - p)^{n-2} \right) \\ &= np e^t (pe^t + 1 - p)^{n-2} (pe^t + 1 - p + (n-1) pe^t) \\ &= np e^t (pe^t + 1 - p)^{n-2} (np e^t + 1 - p) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(0) = np(np + 1 - p) = (np)^2 + np(1 - p)$. On en déduit donc que

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (np)^2 + np(1 - p) - (np)^2 = np(1 - p).$$

2. a. On a $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
- b. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note T_k l'événement : "le tireur touche la $k^{\text{ème}}$ cible". On suppose que les tirs d'une cible à l'autre sont indépendants. Si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors $X_n = k$ si et seulement si le tireur a touché les $k-1$ premières cibles, et manqué la $k^{\text{ème}}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_k \cap \overline{T}_{k+1}) = \mathbb{P}(T_1) \dots \mathbb{P}(T_k) \mathbb{P}(\overline{T}_{k+1}) = p^k (1-p).$$

Considérons maintenant le cas où $k = n$: on a $X_n = n$ ssi le tireur touche toutes les cibles. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(T_1 \cap \dots \cap T_n) = p^n.$$

- c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} p^k (1-p) + e^{nt} p^n = (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} (pe^t)^k + p^n e^{nt} \\ &= (1-p) \frac{1 - p^n e^{nt}}{1 - pe^t} + p^n e^{nt} \end{aligned}$$

d. On a $\mathbb{E}(X_n) = G'_{X_n}(0)$. Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} G'_{X_n}(t) &= (1-p) \frac{-np^n e^{nt}(1-pe^t) + pe^t(1-p^n e^{nt})}{(1-pe^t)^2} + np^n e^{nt} \\ &= \frac{1-p}{(1-pe^t)^2} \left((n-1)p^{n+1} e^{(n+1)t} - np^n e^{nt} + pe^t \right) + np^n e^{nt}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \frac{1-p}{(1-p)^2} ((n-1)p^{n+1} - np^n + p) + np^n \\ &= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + p + np^n(1-p)}{1-p} \\ &= \frac{p - p^{n+1}}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme $p^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{p}{1-p}$.

Exercice 14. On effectue n lancers successifs d'une pièce qui donne face avec la probabilité p . On note X le nombre de fois où on obtient face. Calculer l'espérance de la variable

$$Z = \frac{1}{X+1}.$$

Exercice 15. Pour détecter les patients atteints d'une maladie, on souhaite économiser les tests au maximum. On s'intéresse à une méthode de regroupement des prélèvements. On suppose qu'un individu testé a une probabilité p d'être atteint de la maladie.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X qui désigne le nombre de personnes atteintes parmi un groupe de k personnes choisies aléatoirement ? Déterminer $\mathbb{P}(X=0)$.
2. On regroupe les prélèvements de k personnes, et on effectue un test sur le mélange obtenu.
 - Si le test est négatif, aucune des k personnes n'est contaminée, on arrête donc le test.
 - Si le test est positif, au moins l'une des k personnes est atteinte, et on teste à nouveau toutes les personnes individuellement.

On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de tests effectués au total pour ces k personnes. Calculer la loi de Y et son espérance, en fonction de k et de p .

3. On souhaite tester un échantillon de n personnes, et on propose la stratégie suivante. On sépare les individus en m groupes de k personnes (on a donc $n = mk$). Puis, on effectue le protocole de la question précédente pour chacun des m groupes obtenus. On note $Y_1, \dots, Y_m$ le nombre de tests effectués pour chacun des groupes. Combien de tests peut-on espérer avoir à faire au total avec cette stratégie ? On pourra appeler Z le nombre total de tests effectués.
4. On suppose que la proportion des individus testés positifs est de $p = \frac{5}{100}$, et on effectue environ 150 000 tests par jour. Calculer combien de tests seraient économisés en moyenne en une journée si on optait pour la stratégie de regroupement des prélèvements avec des groupes de 5 personnes, au lieu de tester chaque personne individuellement.

Exercice 16. Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On y effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire une boule ; si la boule est noire, on la remet dans l'urne ; si la boule est blanche, on remet une boule noire dans l'urne à la place de la boule blanche.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages.

1. Déterminer la loi de Y_1 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(Y_n = 2)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.
 - a. Montrer que $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - b. En utilisant la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}.$$

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y_n = 0)$.
5. Calculer l'espérance de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17. Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine 0 par des bonds de une unité ou de deux unités de la manière suivante :

- au départ, la puce est en 0 ;

- si la puce est à l'abscisse k , alors elle va en $k+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ ou en $k+2$ avec probabilité $\frac{1}{2}$;
- les sauts sont tous indépendants.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de sauts de deux unités après n bonds. Déterminer la loi de S_n , son espérance et sa variance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit X_n la variable aléatoire donnant l'abscisse de la puce après n bonds.
 - a. Exprimer X_n en fonction de S_n .
 - b. En déduire la loi, l'espérance et la variance de X_n .
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser l'abscisse n .
 - a. Déterminer $Y_n(\Omega)$.
 - b. Pour tout $n \geq 2$ et $k \geq 1$, montrer que

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

- c. Démontrer alors que pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$

- d. Montrer qu'il existe une constante a telle que la suite de terme général $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - an$ soit récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire la valeur de u_n et $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n .

1. La variable aléatoire S_n donne le nombre de succès pour une suite de n épreuves de Bernoulli dont le succès est "la puce fait un saut de 2 unités", qui a pour probabilité $\frac{1}{2}$. Ces épreuves sont identiques et indépendantes, donc S_n suit la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

Ainsi, on a $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(S_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.

2.
 - a. Au cours des n sauts, la puce a effectué S_n sauts de 2 unités, et $n - S_n$ saut d'une unité, donc

$$X_n = 2S_n + (n - S_n) = S_n + n.$$

- b. On déduit de la question précédente que $X_n(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$, et pour tout

$$k \in \llbracket n, 2n \rrbracket,$$

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k - n) = \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k-n} \frac{1}{2^n}.$$

3.
 - a. On remarque que la puce atteint l'abscisse n en au plus n sauts, on aura $Y_n = n$ si elle ne fait que des sauts d'une unité.
Par ailleurs, la puce atteint l'abscisse n en au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ sauts, on aura $Y_n = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ si elle ne fait que des sauts de 2 unités.
Ainsi, $Y_n(\Omega) = \llbracket \lceil \frac{n}{2} \rceil, n \rrbracket$.
 - b. Soit $n \geq 2$. On a recours à la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[X_1 = 1]$, $[X_1 = 2]$. On a donc

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_n = k) \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_n = k) \mathbb{P}(X_1 = 2).$$

Pour atteindre l'abscisse n en k étapes lorsque $X_1 = 1$ est réalisé, on est ramené à atteindre l'abscisse $n-1$ en $k-1$ étapes, ce qui donne

$$\mathbb{P}_{[X_1=1]}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1).$$

De même, pour atteindre l'abscisse n en k étapes lorsque $X_1 = 2$ est réalisé, on est ramené à atteindre l'abscisse $n-2$ en $k-1$ étapes, donc

$$\mathbb{P}_{[X_1=2]}(Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1).$$

Comme $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$, on obtient bien l'égalité souhaitée.

- c. Si $n \geq 2$, on a $Y_n(\Omega) \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, donc

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) &\stackrel{l=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \mathbb{P}(Y_{n-1} = l) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} l \mathbb{P}(Y_{n-1} = l) + \sum_{l=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_{n-1} = l) \\ &= \mathbb{E}(Y_{n-1}) + 1. \end{aligned}$$

De même, $\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1) = \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$. D'après ce qui précède, on obtient donc bien l'égalité souhaitée.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$, la question précédente donne

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n+1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_n) + 1 - a(n+2) \\ &= \frac{1}{2} (u_{n+1} + a(n+1)) + \frac{1}{2} (u_n + an) + 1 - an - 2a \\ &= \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n - \frac{3a}{2} + 1. \end{aligned}$$

On pose alors $a = \frac{2}{3}$, et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : on a alors $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$ pour tout $n \geq 2$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$, qui a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$. On sait donc que le terme général de (u_n) est de la forme

$$u_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a $\mathbb{E}(Y_0) = 0$ et $\mathbb{E}(Y_1) = 1$, donc $u_0 = 0$ et $u_1 = -1$. On en déduit que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ceci implique que $\alpha = -\beta = \frac{2}{9}$. On en déduit alors que

$$\mathbb{E}(Y_n) = u_n + \frac{2}{3}n = \frac{2}{9} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right) + \frac{2}{3}n.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne remplie de boules numérotées de 1 à n (indiscernables au toucher). On effectue une succession de tirages d'une boule à la fois avec remise dans cette urne. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le numéro de la boule obtenue au k -ième tirage. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k la somme des numéros tirés lors des k premiers tirages, c'est-à-dire

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n correspondant au nombre de tirages nécessaires afin que, pour la première fois, la somme des boules obtenues soit supérieure ou égale à n . Par exemple, si $n = 10$, et si on tire les boules 3, 1, 7 et 5, alors $S_1 = 3, S_2 = 4, S_3 = 11$ et $S_4 = 16$, donc $T_{10} = 3$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k et rappeler son espérance.

2. Ecrire un programme en Python qui simule T_n pour $n = 10$.

3. a. Déterminer $T_n(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

4. Dans cette question, $n = 2$, déterminer la loi de T_2 .

5. Dans cette question, $n = 3$, déterminer la loi de T_3 et vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

6. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

7. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

a. Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1} .

b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

8. a. Rappeler la formule du triangle de Pascal.

b. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \geq k+1$,

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

c. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{P}_k$ la proposition

$$\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{P}_k$ est vraie.

9. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en comparant les événements, $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$, montrer que

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

10. En déduire la loi de T_n .