

12. Dérivation

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0, \\ x^{\frac{3}{2}} \ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité, la dérivabilité et les limites aux bornes du domaine de définition de f .

Exercice 2. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ des fonctions suivantes et calculer leur dérivée sur l'ensemble où elles sont dérivables. On étudiera ensuite les éventuels prolongements par continuité aux bornes finies de $\mathcal{D}$ et la dérivabilité de ceux-ci.

- | | |
|--|---|
| a. $x \mapsto (4 - 3x)^5$ | h. $x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$ |
| b. $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ | i. $x \mapsto \arctan(\sqrt{1-x^2})$ |
| c. $x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$ | j. $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$ |
| d. $x \mapsto x x $ | k. $x \mapsto \tan(\sin x)$ |
| e. $x \mapsto \sin(3^x)$ | l. $x \mapsto x^x$ |
| f. $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ | m. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ |
| g. $x \mapsto \frac{e^{x^2} + 1}{e^{x^2} - 1}$ | n. $x \mapsto x \ln x $ |
| | o. $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ |

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + c & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b, c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que si f est paire, alors f' est impaire.
- Montrer que si f est impaire, alors f' est paire.

3. Soit $T > 0$. Montrer que si f est T -périodique, alors f' est T -périodique.

Exercice 5. Soient un réel a et la fonction $f_a : x \mapsto ax - e^x$. Discuter, suivant les valeurs du réel a , l'existence d'un maximum global de f_a sur $\mathbb{R}$ et donner éventuellement sa valeur.

Exercice 6 – Egalités et inégalités trigonométriques. Montrer que

- pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$.
- pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\tan x \geq x$.
- pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Montrer que toute fonction T -périodique et dérivable sur $\mathbb{R}$ possède une dérivée qui s'annule une infinité de fois.

Exercice 8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$, dérivable sur $[0, 1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

Exercice 9. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Exercice 10. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et deux réels a et b . Montrer que l'équation $x^{2n} + ax + b = 0$, d'inconnue réelle x , admet au plus deux solutions.

Exercice 11. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6+x}$ définie sur $I = [3, +\infty[$. Montrer que pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{6} |x - y|.$$

Exercice 12. En utilisant les accroissements finis, montrer les inégalités suivantes.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

2. $\forall x \geq 0, (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ avec $\alpha > 1$.
3. $\forall x > 0, |\ln(1+x) - x| \leq x^2$.
4. $\forall x > 0, \frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x)$.
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, |e^x - e^y| \leq |x - y|$.

Exercice 13. À l'aide de l'égalité des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 14. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

1. Sans dériver, justifier que f admet un minimum et un maximum sur $[0, 1]$.
2. Toujours sans dériver, déterminer le minimum de f .
3. Déterminer le maximum de f sur $[0, 1]$.

Exercice 15. Soit $f : x \mapsto x^3 e^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} .

Exercice 16. Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x, y , $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ est constante.

Exercice 17. On cherche les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) - f(x) = 0. \quad (E)$$

1. *Analyse.* Soit f une fonction vérifiant (E).
 - a. On pose $h : x \mapsto e^{-\arctan x} f(x)$. Justifier que h est dérivable et déterminer sa dérivée.
 - b. En déduire une expression de f .
2. Faire la synthèse et conclure.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction vérifiant (E) telle que $f(0) = 1$.

Exercice 18. Soit $f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln x}$.

1.
 - a. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]0, e^2]$.
 - b. Montrer que f est continue sur $]0, e^2]$.
 - c. Déterminer les limites aux bornes du domaine.
2. Etudier les variations de f sur $]0, e^2]$ et montrer que l'image de $[1, e]$ par f est contenue dans $[1, e]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[1, e]$.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- a. Montrer que la suite est bien définie et que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. Montrer que pour tous $x, y \in [1, e]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$.
- c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |u_n - a|$.
- d. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- e. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une approximation de a à 10^{-5} près.
- f. Ecrire une fonction en Python qui, pour une erreur $\varepsilon > 0$ donnée, renvoie une approximation de a à ε près.