13. Polynômes

Exercice 1. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^3 - 3x^2$ et $B(x) = x^2 - x + 2$.
2. $A(x) = -16x^4 - 64x^2 - x - 100$ et $B(x) = 4x^2 + 4x + 10$
3. $A(x) = x^4 + 6x^2 - 2x + 5$ et $B(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

Exercice 2. Soient A et B les polynômes définis par $A(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 - 4x + b$ et $B(x) = x^2 - 4x + 5$. Déterminer les valeurs des réels a et b pour que B divise A.

Exercice 3. Factoriser les polynômes suivants.

1. $A(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
2. $B(x) = x^6 - 7x^3 - 8$
3. $C(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Exercice 4. On pose $B(x) = (x-1)^2$.

1. Effectuer la division euclidienne par B des polynômes suivants :

   a. $A_2(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ *b.* $A_3(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

2. Soit n un entier supérieur à 2. Déterminer en fonction de n les réels a_n et b_n pour que B divise A_n, où
$$A_n(x) = a_n x^{n+1} + b_n x^n + 1.$$

Exercice 5. On considère le polynôme P_n défini par
$$P_n(x) = (1+x)(1-x^n) + (2-n)x^n - n^2x^n(1-x) + n - 2 \quad \text{où} \quad n \geqslant 2.$$

1. Développer et ordonner P_n.
2. Montrer que 1 est racine double de P_n.

Exercice 6. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}_3[x]$ tels que $P(1) = P(-1) = 1$, $P(2) = 4$ et $P(-3) = 9$.

Exercice 7. Soient deux polynômes P et Q tels que $P^2(x) = (x-1)Q^2(x)$. Montrer que $P = Q = 0$.

Exercice 8. Que peut-on dire de trois polynômes P, Q et R de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x)^2 - xQ(x)^2 + R(x)^2 = 0 \ ?$$

Exercice 9. On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -2x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+2}(x) = -2xP_{n+1}(x) - 2(n+1)P_n(x).$$
Déterminer P_2, P_3, puis conjecturer les valeurs du degré et du coefficient dominant de P_n. Conclure en raisonnant par récurrence.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et le polynôme P défini par $P(x) = \left(x^2-1\right)^n$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(1) = P^{(k)}(-1) = 0$.
2. Montrer que la dérivée n-ième de P est une fonction polynomiale de degré n qui admet n zéros distincts strictement compris en -1 et 1.

Exercice 11. Soient n et m deux entiers naturels. On pose
$$P(x) = (1+x)^n \quad \text{et} \quad Q(x) = (1+x)^m.$$

1. Ecrire le produit $(PQ)(x)$ sous forme développée de deux manières différentes.
2. En déduire, pour tout p de $[\![0, n+m]\!]$, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$.
3. En déduire ensuite une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12. Soient $a \in \mathbb{R}$ et P un polynôme de degré n, avec $n \geqslant 1$, tel que

- $P(a) > 0$,
- $P^{(k)}(a) \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Montrer que P n'a aucune racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + P(x+1) = 0. \qquad (E)$$

On raisonne par analyse synthèse.

1. *Analyse.* Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant (E).
   a. Montrer que pour tout réel x, $P(x) = P(x+2)$.
   b. Montrer que pour tout entier n, $P(0) = P(2n)$.
   c. En déduire que le polynôme Q défini par $Q(x) = P(x) - P(0)$ est nul et donner une expression de P.
2. *Synthèse.* Conclure.

Exercice 14. Soit P un polynôme de degré n. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet au plus $n+1$ solutions réelles.

Exercice 15. On considère l'équation

$$(x^2+1)P''(x) - 6P(x) \ = \ 0 \qquad (E)$$

dont l'inconnue est une fonction polynomiale P.

1. Montrer que si P est solution de (E), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αP est également solution de (E).
2. Montrer que si P est un polynôme unitaire, alors sa fonction polynomiale associée est solution de (E) si et seulement si $P(x) = x^3 + x$.
3. En déduire l'ensemble des fonctions polynomiales solutions de (E).

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Taylor qu'on rappelle : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

et d'en considérer des applications.

1. Cos particulier : on considère le polynôme P défini par $P(x) = x^2 + 1$.
   a. Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $P^{(k)}(a)$ pour tout entier naturel k.
   b. Vérifier la formule de Taylor pour P.
2. Preuve de la formule de Taylor
   a. Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}_n[x]$. Montrer : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ k!\ a_k = Q^{(k)}(0)$.
   b. En déduire la formule de Taylor pour Q avec $a = 0$.
   c. Montrer la formule générale en utilisant le polynôme $Q(x) = P(x+a)$.
3. Soit P défini par $P(x) = (x+2)^n$. En utilisant la formule de Taylor, calculer $P^{(k)}(0)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
4. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[x]$. Démontrer en utilisant la formule de Taylor que a est une racine de multiplicité m de P si et seulement si

$$\forall k \in [\![0,\ m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0, \quad \text{et } P^{(m)}(a) \neq 0.$$

Exercice 17. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe deux polynômes R et S tels que $P = R^2 + S^2$.

1. Montrer que P est de degré pair, et que son coefficient dominant est positif.
2. Justifier qu'il existe n et p deux entiers naturels tels que P s'écrive

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)^{m_k} R_1(x) \dots R_p(x),$$

   avec $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ des racines réelles distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_n$ et $R_1, \dots, R_p$ des polynômes de degré 2 à discriminant négatif.
3. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, m_i est un entier pair.
   On pourra raisonner par l'absurde en supposant $m_i = 2\ell_i + 1$, avec $\ell_i \in \mathbb{N}$, et considérer $\frac{P(x)}{(x-\alpha_i)^{2\ell_i}}$.
4. Montrer que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, R_j s'écrit comme somme de deux carrés de polynômes.
5. *a.* Soient A, B, C, D quatre réels. Montrer que

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC+BD)^2 + (AD-BC)^2.$$

   b. Conclure.