14. Introduction aux espaces vectoriels réels

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, préciser si F définit un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de référence qu'on précisera.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2x-y \\ y & x+2y \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
2. $F = \{(a+2b-c,\, 2a+3b-d,\, b-c+2d),\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0\}$.
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}$.
5. $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 2\big\}$.
6. $F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\big\}$.
7. $F = \{x \mapsto (\alpha + \beta)x^2 + \alpha - \beta + \gamma,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$.
8. l'ensemble F des suites bornées par 1.
9. l'ensemble F des suites bornées.
10. l'ensemble F des suites arithmétiques.
11. $F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0\}$, avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
12. L'ensemble F des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM = MB$ où A, B sont deux matrices fixées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
13. L'ensemble F des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM = B$ où A, B sont deux matrices fixées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
14. L'ensemble F des fonctions croissantes définies sur $\mathbb{R}$.
15. L'ensemble F des fonctions monotones définies sur $\mathbb{R}$.
16. L'ensemble F des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$.
17. $F = \{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 3f'(t)\}$.
18. $F = \{P \in \mathbb{R}_4[x],\ P(x) + 5P'(x) + 3x = 0\}$.
19. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(0) = P(1)\}$.
20. $F = \big\{P \in \mathbb{R}_2[x],\ P(x) - (x-1)P'(x) = (2x^2 - 3x + 4)P''(x)\big\}$.

Exercice 2.

1. Dans chacun des cas, dire si les vecteurs suivants forment une famille libre.
   a. $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$.
   b. $e_1 = (1, -2, 3)$, $e_2 = (-2, 3, 1)$, $e_3 = (-5, 6, 13)$.
   c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   d. $f_1 : x \mapsto |x|$, $f_2 : x \mapsto |x+1|$, $f_3 : x \mapsto |x-1|$.
   e. $f_1 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$, $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $f_3 : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-x}$, $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
2. Dans chacun des cas, dire si les vecteurs suivants forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
   a. $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$.
   b. $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$.

Exercice 3. On considère les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 17 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Le vecteur v est-il combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3 ? Si oui, la combinaison linéaire est-elle unique ?
2. Le vecteur w est-il combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 et u_3 ?
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Déterminer une expression de u_3 en fonction de u_1 et u_2, ainsi qu'une base de $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Exercice 4.

1. La famille de polynômes $(x^3 - 1,\ x^2 + x + 1,\ x - 1)$ est-elle libre ?
2. La famille $(x^2 + x + 1,\ 5x^2 + x + 3,\ 6x^2 + 2x + 4)$ est-elle libre ?
3. La famille $(x^2 + x + 2,\ 2x^2 + 3x + 1,\ 3x^2 + 5x - 1)$ est -elle libre ?

Exercice 5.

1. Montrer que $\big((2, 1), (1, 1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelles sont les coordonnées de $(1, -3)$ dans cette base ?

Exercice 6. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de e_1, e_2 et e_3 dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 7. On considère les polynômes

$$P(x) = x, \quad Q(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad R(x) = (x-1)(x-2).$$

1. Montrer que la famille (P, Q, R) forme une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Soient a, b, c trois réels. Déterminer un polynôme $T \in \mathbb{R}_2[x]$ tel que

$$T(1) = a, \quad T(2) = b, \quad T(3) = c.$$

Exercice 8. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\}$,
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y + z = 0\}$.

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels, et déterminer une base de chacun d'eux.
2. Justifier que $F \cap G$ est un espace vectoriel réel et en déterminer une base.

Exercice 9. On associe à tout triplet de réels (x, y, z) la matrice

$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité I et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J.

1. Calculer J^2 et J^3.
2. Etablir que l'ensemble $\{M(x, y, z),\ x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base.

Exercice 10.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec A non diagonale telle que $A^2 = 3A - 2I_2$. Montrer que (I_2, A) est une base de $F_n = \text{Vect}(I_2, A, A^2, \ldots, A^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.
2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$ et $A^2 \neq 0$. Montrer que la famille (I_n, A, A^2) est libre.
3. *Généralisation.* Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$. Montrer que la famille $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On souhaite montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1. Montrer l'implication directe : on pourra raisonner par contraposée et montrer que si $u \in F \backslash G$ et $v \in G \backslash F$ alors $u + v \notin F \cup G$.
2. Montrer l'implication réciproque.