

15. Intégration sur un segment

Exercice 1. Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, sur un intervalle à déterminer.

1. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x}$.	3. $f : x \mapsto \frac{x+3}{x+1}$.
2. $f : x \mapsto (x+3)(x+2)$.	4. $f : x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+1}$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$.	3. $\int_0^4 x-2 dx$.
2. $\int_0^1 2x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} dx$.	4. $\int_0^2 x^2 [x] dx$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties.

1. $\int_0^1 x e^x dx$.	2. $\int_0^\pi \cos(t) e^t dt$.	3. $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.
--------------------------	----------------------------------	-------------------------------

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx, \quad (u = x^3)$	4. $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx, \quad (u = \sqrt{x+1})$
2. $\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1+\ln t}} dt, \quad (x = \ln t)$	5. $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1} dx, \quad (u = e^x+1)$
3. $\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3} dt, \quad (\text{affine})$	6. $\int_0^1 \frac{t^2-3t+1}{\sqrt{2t+3}} dt, \quad (\text{affine})$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e (\ln t)^2 dt$.	3. $\int_0^1 \arctan t dt$.	5. $\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$.
2. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{1+\sin t} dt$.	4. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.	

Exercice 6.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$,

$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}.$$

2. En déduire $\int_2^3 \frac{1}{t(t^2-1)} dt$.

Exercice 7.

1. Montrer que $\int_0^{\pi/3} (\sin t)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Montrer que $\int_0^\pi e^{-nt} \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 8. Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

1. On considère φ et ψ , deux fonctions de I dans J dérivables sur I , et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur J . Pour tout $x \in I$, on pose

$$u(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt.$$

Montrer que u est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Soit v la fonction définie par

$$v(x) = \int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

a. Montrer que la fonction v est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et paire.

b. Montrer que v est constante sur $\mathbb{R}^*$, et préciser la valeur de la constante.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

- Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et étudier sa parité.
- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^2 x (\ln x)^n dx$.

- Calculer I_0 .
- Pour tout entier naturel n , déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} .
- En déduire les valeurs de I_1 et de I_2 .

Exercice 10. Déterminer les limites suivantes.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}.$
- Pour chacune de ces sommes, écrire un programme PYTHON pour vérifier les résultats obtenus.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

- Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

- En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

- Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
- Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.

- En déduire la valeur de u_0 .
- Calculer u_1 .
- Démontrer que (u_n) est décroissante et en déduire sa nature.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 13. Le but de cet exercice est de déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt, \quad \text{pour tout } x \in [1, +\infty[.$$

- Pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.
- Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
- En déduire la limite désirée.
- Retrouver ce résultat en calculant l'intégrale à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 14. On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

- Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
Indication : Pour calculer I_2 , on pourra exprimer $\cos^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.
- Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - En ayant recours à l'intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+1})$$

Indication : on pourra remarquer que $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)^{n+1} \times \cos t$ pour tout réel t .

d. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 15. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3.
 - a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - b. Déterminer la dérivée de f et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4.
 - a. Par encadrement, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2.$$

- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
 - c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5.
 - a. Montrer que pour tout réel x , on a $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
 - b. Déterminer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
 - c. En déduire l'expression explicite de f .
6.
 - a. Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} (1 + \sqrt{t^2 + 1})} dt.$$

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6} x^3.$$

c. Conclure que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.

d. Montrer que l'on a aussi $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et $+\infty$.

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$.

2. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

3. En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
5.
 - a. Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
 - b. Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
6. On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.