15. Intégration sur un segment

Exercice 1. Déterminer une primitive de f dans chacun des cas suivants, sur un intervalle à déterminer.

1. $f : x \mapsto (x - 1)\sqrt{x}$.	3. $f : x \mapsto \frac{x + 3}{x + 1}$.
2. $f : x \mapsto (x + 3)(x + 2)$.	4. $f : x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$.

1. $F : x \mapsto \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $f : x \mapsto x^2 + 5x + 6$ a pour primitive $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 6x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \frac{x + 1 + 2}{x + 1} = 1 + 2\frac{1}{x + 1}$, donc

$$F : x \mapsto x + 2 \ln|x + 1|$$
 est une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1 + x - 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$, donc

$$F : x \mapsto x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan x$$
 est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$.	3. $\int_0^4 x - 2 dx$.
2. $\int_0^1 2x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} dx$.	4. $\int_0^2 x^2 [x] dx$.

1. $\int_1^e \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \ln|x| \right]_1^e = 2 - \frac{1}{e}$.
2. $\int_0^1 2x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} dx = -\frac{4}{3} \int_0^1 -\frac{3}{2} x^2 e^{-\frac{x^3}{2}} dx = -\frac{4}{3} \left[e^{-\frac{x^3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (1 - e^{-\frac{1}{2}})$.
3. $\int_0^4 |x - 2| dx = \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 = 4$.
4. $\int_0^2 x^2 [x] dx = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{3}$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes par intégration par parties.

1. $\int_0^1 x e^x dx$.	2. $\int_0^\pi \cos(t) e^t dt$.	3. $\int_0^1 \ln(1 + t^2) dt$.

1. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a par IPP

$$\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

2. Pour calculer $I = \int_0^\pi \cos t e^t dt$, nous allons faire deux IPP successives. On a

$$I = [\sin(t) e^t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t) e^t dt = - \int_0^\pi \sin(t) e^t dt$$

car les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Alors,

$$I = - \left([-\cos(t) e^t]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(t) e^t dt \right) = -(e^\pi + 1 + I),$$

car les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto e^t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Alors, on a obtenu que $2I = -(1 + e^\pi)$, ou encore $I = -\frac{1 + e^\pi}{2}$.

3. Comme les fonctions $u : t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1 + t^2)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a

$$I = \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 t \frac{2t}{1 + t^2} dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt.$$

Ainsi,

$$I = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2t^2 - 2}{1 + t^2} dt + 2 \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = \ln 2 - 2 + 2 [\arctan t]_0^1.$$

Par conséquent, on a $I = \ln 2 + 2 \arctan 1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes par changement de variables.

1. $\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^6} dx, \quad (u = x^3)$ 2. $\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{1 + \ln t}} dt, \quad (x = \ln t)$ 3. $\int_0^1 \frac{t^3}{(1 + t)^3} dt, \quad (\text{affine})$	4. $\int_1^2 \frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}} dx, \quad (u = \sqrt{x + 1})$ 5. $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx, \quad (u = e^x + 1)$ 6. $\int_0^1 \frac{t^2 - 3t + 1}{\sqrt{2t + 3}} dt, \quad (\text{affine})$

1. $\frac{\pi}{12}$. 2. $2(\sqrt{2} - 1)$. 3. $\frac{17}{8} - 3 \ln 2$. 4. $\frac{8}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$. 5. $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} + \ln \frac{1 + e}{2}$.
 6. $4\sqrt{5} - \frac{26}{5}\sqrt{3}$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_1^e (\ln t)^2 dt$. 2. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos t}{1 + \sin t} dt$.	3. $\int_0^1 \arctan t dt$. 4. $\int_1^2 x^2 \ln(x) dx$.	5. $\int_0^1 (x - 1)e^{-x} dx$. 6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt$.

1. On trouve $e - 2$. On peut effectuer une intégration par parties en écrivant l'intégrale au choix $\int_1^e 1 \times (\ln t)^2 dt$ ou $\int_0^1 (\ln t)(\ln t) dt$.
 2. On reconnaît que l'intégrande est sous la forme $\frac{u'}{u}$. On obtient $\ln\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 3. On effectue une intégration par parties dans $\int_0^1 1 \times \arctan t dt$. On obtient $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

4. On effectue une intégration par parties, et on obtient $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$.

5. On effectue une intégration par parties, et on trouve $-e^{-1}$.

6. On peut effectuer une intégration par parties à partir de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)(\cos t) dt$.

On peut aussi remarquer que $\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1$ (par la formule trigonométrique $\cos(a + b)$), donc $\cos^2 t = \frac{\cos(2t) + 1}{2}$. On trouve $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6.

1. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 0\}$,

$$\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t + 1} + \frac{c}{t - 1}.$$

2. En déduire $\int_2^3 \frac{1}{t(t^2 - 1)} dt$.

Exercice 7.

1. Montrer que $\int_0^{\pi/3} (\sin t)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Montrer que $\int_0^\pi e^{-nt} \cos\left(\frac{t}{n}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 8. Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

1. On considère φ et ψ , deux fonctions de I dans J dérivables sur I , et $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur J . Pour tout $x \in I$, on pose

$$u(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt.$$

Montrer que u est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. Soit v la fonction définie par

$$v(x) = \int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt.$$

a. Montrer que la fonction v est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et paire.

b. Montrer que v est constante sur $\mathbb{R}^*$, et préciser la valeur de la constante.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$.

a. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et étudier sa parité.

b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^2 x (\ln x)^n dx$.

- Calculer I_0 .
- Pour tout entier naturel n , déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} .
- En déduire les valeurs de I_1 et de I_2 .

Exercice 10. Déterminer les limites suivantes.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \left| \quad 2. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}.$$

3. Pour chacune de ces sommes, écrire un programme PYTHON pour vérifier les résultats obtenus.

- On reconnaît des sommes de Riemann. On obtient $\frac{2}{\pi}$ pour la première limite, et $\frac{\ln 2}{2}$ pour la deuxième.
- Dans chacun des cas, on calcule la valeur de la somme pour un entier n grand, on affiche la différence entre S_n et la limite calculée dans la question précédente. Les deux valeurs affichées sont très proches de 0.

```
import numpy as np
n=1000
S=0
for k in range(n):
    S+=np.sin(k*np.pi/n)
print(S/n-2/np.pi)
```

```
n=1000
S=0
for k in range(n):
    S+=k/(n**2+k**2)
print(S-np.log(2)/2)
```

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

- Justifier l'existence de l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

3. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- La fonction $t \mapsto \frac{t^n}{1+t}$ est continue sur $[0, 1]$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$. Ainsi, la croissance de l'intégrale donne

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, par encadrement, on obtient que $I_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on reconnaît que $\frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t}$ est la valeur d'une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 - (-t)} = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t}.$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t)^k dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-t)^k dt = S_n$$

car $\int_0^1 (-t)^k dt = \left[-\frac{(-t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = -\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}$, ce qui conclut.

3. On déduit de la question précédente que

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^{n+1} I_{n+1} \\ &= \ln 2 - (-1)^{n+1} I_{n+1}. \end{aligned}$$

D'après la question 1, on a $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.

3. En déduire la valeur de u_0 .
4. Calculer u_1 .
5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire sa nature.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale u_n est bien définie.
2. - La fonction $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^2+1 > 0$).
- La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, par dérivation composée, f est dérivable sur $[0, 1]$. Par ailleurs,

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. On en déduit

$$u_0 = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

4. On a

$$u_1 = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$$

5. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^{n+1} \leq x^n$, donc $\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx, \text{ i.e. } u_{n+1} \leq u_n,$$

par croissance de l'intégrale. On a donc bien montré que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

La croissance de l'intégrale implique encore que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^n$. Ainsi,

$$u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

par croissance de l'intégrale. On en déduit par encadrement que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 13. Le but de cet exercice est de déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt, \text{ pour tout } x \in [1, +\infty[.$$

1. Pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, calculer $\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$.
2. Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t + \sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$.
3. En déduire la limite désirée.

- Retrouver ce résultat en calculant l'intégrale à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 14. On considère la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

- Montrer que I_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

Indication : Pour calculer I_2 , on pourra exprimer $\cos^2(t)$ en fonction de $\cos(2t)$.

- Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - En ayant recours à l'intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

Indication : on pourra remarquer que $(\cos t)^{n+2} = (\cos t)^{n+1} \times \cos t$ pour tout réel t .

- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 15. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.

- Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est impaire.
- Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer la dérivée de f et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Par encadrement, montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2.$$

- En déduire la limite de f en $+\infty$.

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Montrer que pour tout réel x , on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
 - Déterminer la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
 - En déduire l'expression explicite de f .
- Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(1+\sqrt{t^2+1})} dt.$$

- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6} x^3.$$

- Conclure que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$.
- Montrer que l'on a aussi $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

- Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et $+\infty$.

On note Φ la fonction donnée par : $\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$.

- Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}.$$

- En déduire les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.
- Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.
 - Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$. On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.
- On donne $\Phi(2) \approx 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \approx 0,7$. Tracer l'allure de la courbe représentative de Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.